Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

13. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Beweisen Sie, dass die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

(b) Berechnen Sie A^{13}.

LÖSUNG:

(a) Die charakteristische Gleichung zur Matrix A lautet $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$, also hat A die Eigenwerte $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ und besitzt zwei Eigenräume. Für $\lambda = 2$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Lösung erhält man $x_1 = -s, x_2 = t, x_3 = s$. Damit sind die Eigenvektoren von A zu $\lambda = 2$ die von Null verschiedenen Vektoren der Gestalt

$$x = \begin{pmatrix} -s \\ t \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis des Eigenraumes zu $\lambda = 2$. Für $\lambda = 1$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen haben die Gestalt $x_1 = -2s, x_2 = s, x_3 = s$. Also spannt

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

den Eigenraum zu $\lambda = 1$ auf. Da wir nun drei linear unabhängige Basisvektoren gefunden haben, ist A diagonalisierbar mit

$$P := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Inverse von P ist

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} A^{13} = PD^{13}P^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(G 2)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ sei durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + yz \end{pmatrix}.$$

gegeben.

(a) Beweisen Sie, dass f nicht diagonalisierbar ist.

(b) Berechnen Sie eine Basis des $\mathbb{C}^3$, in der f Trigonalgestalt hat.

Lösung:

(a) In der kanonische Basis des $\mathbb{C}^3$ hat f die Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dazu lautet $(2 - \lambda)^2(3 - \lambda)$. Daher sind 2 und 3 die Eigenwerte von A (bzw. f). Für den Eigenwert 2 erhält man als Lösungen des System

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses System hat nur $u := (1,0,0)^\perp$ (und alle skalaren Vielfachen davon) als Lösung. Somit ist u eine Basis des Eigenraumes zu 2. Für den Eigenwert 3 erhält man als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur den Vektor $v := (1,1,-2)$ (und alle seine skalaren Vielfachen). Da f bzw. A nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, die geometrische Vielfachheit also echt kleiner der algebraischen ist, ist f nicht diagonalisierbar.

(b) Es muss nur noch die Untermatrix

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

trigonalisiert werden, d.h. der Eintrag in der linken, unteren Ecke muss eliminiert werden. Ihre charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (3-\lambda)(2-\lambda) = 0$, also sind 3 bzw. 2 die Eigenwerte von A'. Zum Eigenwert 3 erhalten wir aus

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

den Eigenvektor $(-1,2)^T$. Wir wählen als Transformationsmatrix nun

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von S ist gerade S selber, also $SS = E_3$. Damit hat

$$S^{-1}AS = SAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die gefordete Triangulärgestalt.

(G 3)

Eine lineare Selbstabbildung $L : V \to V$ eines Vektorraumes V über dem Körper $\mathbb{K}$ heißt *nilpotent*, wenn eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $L^n = 0$ existiert. Es sei $L : V \to V$ eine solche nilpotente Abbildung. Beweisen Sie

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von L so gilt $\lambda = 0$.

(b) Es gibt einen Eigenvektor zum Eigenwert 0.

(c) Es gibt eine Basis von V bezüglich derer L durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

dargestell wird, wobei A' nilpotent ist.

LÖSUNG:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von L so gibt es einen Vektor $0 \neq v \in V$ mit $L(v) = \lambda \cdot v$. Hieraus folgt $L^n(v) = \lambda^n v = 0$, mithin $\lambda^n = 0$ also $\lambda = 0$.

(b) Aus $L^n = 0$ folgt $\det L^n = (\det L)^n = 0$ und somit $\det L = 0$. Somit ist der Kern von L nicht trivial und es gibt einen Vektor $v \in V$ mit $L(v) = 0$. Dies ist der gesuchte Eigenvektor.

(c) Wenn man dien Eigenvektor V zu einer Basis $\mathcal{B} = \{v, w_2, \ldots, w_n\}$ ergänzt, hat die Darstellungsmatrix von L bezüglich $\mathcal{B}$ die gesuchte Gestalt.

(G 4)

Beweisen Sie, daß jede nilpotente Matrix trigonalisierbar ist.

LÖSUNG:

Nach der vorherigen Aufgabe kann man jede nilpotente $n \times n$-Matrix A durch eine Ähnlichkeitstransformation (Basiswechsel!) auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

dargestell wird, wobei A' eine Nilpotente $(n-1) \times (n-1)$-Matrix ist. Mit Induktion folgt nun die Existenz einer $(n-1) \times (n-1)$-Matrix S' so daß $S'a's'^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & S' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

läßt sich A nun trigonalisieren:

$$\begin{aligned} SAS^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & S' \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & S' \\ 0 & \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & S' \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & S'^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & S'A'S'^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(G 5) Sesquilinearformaen

Eine *Sesquilinearform* auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, welche antilinear in der ersten und linear in der zweiten Komponente ist. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\langle -, - \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{y}$ mit $\mathbf{x}^H = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ eine Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^n$ ist. (Der Vektor $\mathbf{x}$ ist hier ein Spaltenvektor.)

LÖSUNG:

Da die Matrixmultiplikation bilinear ist, ist die Abblidung $\langle -, - \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{y}$ linear in $\mathbf{x}^H$ und $\mathbf{y}$, also linear in $\mathbf{y}$ und antilinear in $\mathbf{x}$.

(G 6) Skalarprodukte

Ein *Skalarprodukt* auf einem rellen Vektorraum V ist eine positiv definite bilineare Abbildung $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Der Winkel α zwischen zwei nichttrivialen Vektoren v und w ist dann durch die Gleichung $\langle v, w \rangle = \sqrt{\langle v, v \rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w \rangle} \cos \alpha$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist. (Der Vektor $\mathbf{x}$ ist hier ein Spaltenvektor.)

(b) Berechen Sie den Winkel zwischen $(1,0)^T$ und $(1,1)^T$.

LÖSUNG:

(a) Da die Matrixmultiplikation bilinear ist, ist die Abblidung $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ eine Bilinearform. Aus $\mathbf{x}^T \mathbf{x} \geq 0$ und $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ folgt, daß sie positiv definit ist. Somit ist $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt.

(b) $\frac{\pi}{4}$.

(G 7) Eigenwerte und Eigenvektoren

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimme die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

LÖSUNG:

(a) $$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda-3) = (-2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Also sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$ Eigenwerte.
Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-II),III+(-2II)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Alle Vektoren der Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu \neq 0$, sind Eigenvektoren.

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-III),II+(-III)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setze $x_2 = \lambda \Rightarrow x_3 = 2\lambda$ und $x_1 = \lambda$.

Also sind alle Vektoren der Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Eigenvektoren.

(b) Bei einer Drehung sind die Vektoren der Drehachse dadurch ausgezeichnet, dass sie durch die Drehung nicht verändert werden, dass also $Ax = x$ gilt. D.h. x ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir bestimmen diese Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4II,III+4I} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} + 2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I+(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}})} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(8 - 4\sqrt{3}) & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $(1, 0, 1)^T$ ein solcher Eigenvektor und damit ist $(1, 0, 1)^T$ die Richtung der Drehachse.
Um den Drehwinkel zu bestimmen, bilden wir einen zur Drehachse senkrechten Vektor. z.B. $x = (0, 1, 0)^T$ mit der Drehung ab. Es gilt

$$Ax = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und der Winkel α zwischen x und Ax ist der Drehwinkel:

$$\cos(\alpha) = \frac{x \cdot Ax}{||x|| \cdot ||Ax||} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also gilt $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Hausübungen

(H 1)

Bearbeiten Sie alle Aufgaben, welche Sie bis jetzt ausgelassen haben.