Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 07/08 17./18.01.08

Lineare Algebra I

12. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene und $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Spiegelung an dieser Ebene. Geben Sie ohne Rechnung alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung ϕ an.

(G 2)

Wir betrachten die $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen. Wie hängen die zugehörigen Eigenvektoren zusammen?

(b) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom besitzen.

(c) Gilt auch jeweils auch die Umkehrung?

(G 3)

Betrachten Sie die reelle Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Ist A diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie A^{25}.

Hausübungen

(A 35) (10 Punkte)

Seien A, B zwei $(n \times n)$-Matrizen. Zeigen Sie, dass die Matrizen AB und BA die selben Eigenwerte haben.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$ von AB auch ein Eigenwert von BA ist. Was müssen Sie bei $\lambda = 0$ zusätzlich beachten?

(A 36) (10 Punkte)

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten, und sei B eine weitere $(n \times n)$-Matrix mit $AB = BA$. Zeige, dass es dann eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ gibt, so dass sowohl SAS^{-1} als auch SBS^{-1} Diagonalmatrizen sind (d.h. A und B sind *simultan diagonalisierbar*).

(A 37) (10 Punkte)

Die Folge der Fibonaccizahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch die Rekursionsvorschrift

$$f_0 := 0\,, \qquad f_1 := 1\,, \qquad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir suchen eine explizite Darstellung dieser Zahlen.

(a) Berechnen Sie die ersten 10 Fibonaccizahlen $f_1, \ldots, f_{10}$. (Können Sie die explizite Form erraten?)

(b) Finden Sie eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (Beweis!)

$$F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}\,,$$

und beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung $F^{n+2} = F^n + F^{n-1}$ gilt. (Hierbei setzen wir $F^0 := E_2$.)

(c) Zeigen Sie, dass F diagonalisierbar ist.

(d) Finden Sie eine explizite Formel für die Fibonaccizahlen.