Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 17./18.01.08

Lineare Algebra I

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene und $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Spiegelung an dieser Ebene. Geben Sie ohne Rechnung alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung ϕ an.

LÖSUNG: Die Vektoren der Ebene E werden von ϕ fix gehalten und sind somit Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Für jeden Vektor v der Normalengerade zu E gilt $\phi(v) = -v$, d.h. diese Vektoren sind Eigenvektoren zum Eigenwert -1.

(G 2)

Wir betrachten die $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen. Wie hängen die zugehörigen Eigenvektoren zusammen?

(b) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom besitzen.

(c) Gilt auch jeweils auch die Umkehrung?

LÖSUNG: (a) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix und S eine invertierbar $(n \times n)$-Matrix. Sei weiter λ ein Eigenwert von A und v ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$S^{-1}AS(S^{-1}v) = S^{-1}Av = \lambda S^{-1}v \ ,$$

d.h. $S^{-1}v$ ist ein Eigenvektor von $S^{-1}AS$ zum Eigenwert λ.

Daraus folgt insbesondere, dass für jeden Eigenvektor v von A zum Eigenwert λ, der Vektor $S^{-1}v$ ein Eigenvektor von $S^{-1}AS$ zum Eigenwert λ ist. Umgekehrt folgt daraus auch, dass für jeden Eigenvektor w von $S^{-1}AS$ zum Eigenwert λ auch Sw ein Eigenvektor von $S(S^{-1}AS)S^{-1} = A$ zum Eigenwert λ ist. Insgesamt haben also A und $S^{-1}AS$ die gleichen Eigenwerte und v ist genau dann Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, wenn $S^{-1}v$ Eigenvektor von $S^{-1}AS$ zum Eigenwert λ ist.

(b) Seien A und S $(n \times n)$-Matrizen und S invertierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_{S^{-1}AS}(\lambda) &= \det(\lambda E_n - S^{-1}AS) = \det\big(S^{-1}(\lambda E_n - A)S\big) \\ &= \det(S)^{-1}\det(\lambda E_n - A)\det(S) = \det(\lambda E_n - A) = P_A(\lambda) \ , \end{aligned}$$

d.h. A und $S^{-1}AS$ haben das gleiche charakteristische Polynom.

(c) Die Umkehrung gilt nicht, denn die Matrizen $A := E_n$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ haben beide das Minimalpolynom $(\lambda - 1)^2$ und damit den einzigen Eigenwert 1. Sie sind jedoch nicht ähnlich, weil A nur zu sich selbst ähnlich ist.

(G 3)

Betrachten Sie die reelle Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Ist A diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie A^{25}.

LÖSUNG: (a)

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda E_2 - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$$

(b) Die Eigenwerte sind also durch $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$ gegeben. Da A zwei verschiedene Eigenwerte hat, die Matrix diagonalisierbar. Außerdem beide zugehörigen Eigenräume eindimensional sein. Durch Berechnen des Kerns von $A - \lambda_2 I$ bzw. $A - \lambda_1 I$ oder durch Raten erhalten wir für $\lambda_2 = 5$ den Eigenvektor $v_2 = (1, 1)^T$ und für $\lambda_1 = -1$ den Eigenvektor $v_1 = (2, -1)^T$. Mit $S := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt dann

$$D := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

(c) Es gilt

$$A^{25} = S(S^{-1}AS)^{25}S^{-1} = S\, D^{25}\, S^{-1} .$$

Mit $S^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich also

$$A^{25} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5^{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 5^{25} & 2 + 2 \cdot 5^{25} \\ 1 + 5^{25} & -1 + 2 \cdot 5^{25} \end{pmatrix} .$$

Hausübungen

(A 35) (10 Punkte)

Seien A, B zwei $(n \times n)$-Matrizen. Zeigen Sie, dass die Matrizen AB und BA die selben Eigenwerte haben.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$ von AB auch ein Eigenwert von BA ist. Was müssen Sie bei $\lambda = 0$ zusätzlich beachten?

LÖSUNG: Sei λ ein Eigenwert von AB mit Eigenvektor $v \neq 0$, d.h. es gelte $ABv = \lambda v \neq 0$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $w := Bv \neq 0$ gilt (z.B. für $\lambda \neq 0$). Dann gilt für diesen Vektor $w = Bv$ gilt weiter

$$BAw = BA(Bv) = B(ABv) = \lambda Bv = \lambda w ,$$

d.h. $w \neq 0$ ist ein Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.

Ist hingegen $Bv = 0$, so ist B nicht invertierbar. Damit ist auch BA nicht invertierbar, d.h. $\lambda = 0$ ist ein Eigenwert von BA.

(A 36) (10 Punkte)

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten, und sei B eine weitere $(n \times n)$-Matrix mit $AB = BA$. Zeige, dass es dann eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ gibt, so dass sowohl SAS^{-1} als auch SBS^{-1} Diagonalmatrizen sind (d.h. A und B sind *simultan diagonalisierbar*).

LÖSUNG: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die verschiedenen Eigenwerte von A und seien $v_1, \dots, v_n$ entsprechende zugehörige Eigenvektoren. Der zu λ_i gehörige Eigenraum ist dann jeweil durch die skalaren Vielfachen von v_i gegeben. Nun gilt für die Vektoren $y_i := Bv_i$

$$A(Bv_i) = ABv_i = BAv_i = \lambda_i(Bv_i) ,$$

d.h. Bv_i liegt im Eigenraum von A zum Eigenwert λ_i. Es gibt somit einen Skalar α_i mit $Bv_i = \alpha_i v_i$. Somit ist v_i auch ein Eigenvektor von B (zum Eigenwert α_i). Damit hat bilden die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des Vektorraumes, in welcher sowohl A also auch B diagonal sind.

(A 37) (10 Punkte)

Die Folge der Fibonaccizahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch die Rekursionsvorschrift

$$f_0 := 0 , \qquad f_1 := 1 , \qquad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir suchen eine explizite Darstellung dieser Zahlen.

(a) Berechnen Sie die ersten 10 Fibonaccizahlen $f_1, \dots, f_{10}$. (Können Sie die explizite Form erraten?)

(b) Finden Sie eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (Beweis!)

$$F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} ,$$

und beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung $F^{n+2} = F^n + F^{n+1}$ gilt. (Hierbei setzen wir $F^0 := E_2$.)

(c) Zeigen Sie, dass F diagonalisierbar ist.

(d) Finden Sie eine explizite Formel für die Fibonaccizahlen.

LÖSUNG: (a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

(b) Wir setzen $F := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Durch vollständige Induktion zeigt man dann leicht, dass diese Matrix auch die gewünschte Bedingung erfüllt:

$$F^0 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) ,$$
$$F^{n+1} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = FF^n \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = F \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} .$$

Ebenso zeigt man durch vollständige Induktion, dass F für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $F^{n+2} = F^n + F^{n+1}$ erfüllt:

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = F^0 + F^1 ,$$
$$F^{n+3} = F(F^{n+2}) = F(F^n + F^{n+1}) = F^{n+1} + F^{n+2}$$

(c) Als charakteristisches Polynom von F ergibt sich

$$P_F(\lambda) = \det(\lambda E_2 - F) = \lambda(\lambda - 1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 .$$

Die Eigenwerte von F sind somit durch $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ gegeben. Da F zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, ist die Matrix diagonalisierbar.

(d) Die Eigenvektoren von F zu λ_1 bzw. λ_2 lassen sich durch geschicktes Raten oder durch den Gauß-Algorithmus bestimmen und sind durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Mit der Transformationsmatrix $S := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ gilt also

$$D_F := S^{-1}FS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

Mit Hilfe der Inversen $S^{-1} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ lassen sich dann auch die Potenzen von F bestimmen. Für die Fibonaccizahlen gilt deshalb

$$F^n = S(S^{-1}FS)^n S^{-1} = S\, D_F^n\, S^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} &= F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = SD_F^n S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_1^n \\ \lambda_2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Es gilt somit

$$f_n = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^n - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}} .$$