Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

11. Übung

Gruppenübungen

MINITEST

(T 1) Für den Rang rankϕ **einer linearen Abbildung** $\phi : V \to W$ **gilt**

☐ $\text{rank}\phi \leq \dim(W)$ ☐ $\text{rank}\phi \leq \dim(V)$ ☐ $\text{rank}\phi \leq \dim(\ker\phi)$ ☐ $\text{rank}\phi \leq \dim(\text{Im}\phi)$

(T 2)

Es seien $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ und B gehe aus A durch elementare Zeilenumformungen hervor. Welche der folgenden Aussagen ist (oder sind) falsch?

☐ $\det A = 0 \Leftrightarrow \det B = 0$ ☐ $\det A = \det B$ ☐ $\exists \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\} : \det A = \lambda \det B$

(T 3) det $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} =$

☐ 0 ☐ λ ☐ λ^3 ☐ 9λ ☐ λ^9

(G 1)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellwertigen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(G 2)

Es sei A eine quadratische Matrix.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenräume haben.

(G 3)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

(G 4)

Beweisen Sie folgende Aussagen für eine komplexe Matrix A:

(a) λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ ist Eigenwert von A.

(b) A ist regulär $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind von Null verschieden.

(c) Ist A regulär, so gilt:
λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von A^{-1}.

(d) λ ist Eigenwert von $A \Rightarrow \lambda^k$ ist Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Hausübungen

(A 14) Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

(A 15) (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass sich die charakteristische Gleichung einer 2×2-Matrix A als

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A) = 0$$

schreiben lässt.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen der charakteristischen Gleichung für eine reellwertige Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix A keine, ein oder zwei reelle Eigenwerte?

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind für den Fall, dass A reelle Eigenwerte hat.

(d) Berechnen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a + b = c + d$ die Eigenwerte von A und zeigen Sie, dass sie ganzzahlig sind.

(A 16) (10 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $B_\lambda = A - \lambda E_2$. Berechne Werte λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so daß $\det(B_{\lambda_i}) = 0$.

(b) Finde Vektoren v_1 und v_2, die $V_1 := \ker B_{\lambda_1}$ bzw. $V_2 := \ker B_{\lambda_2}$ erzeugen. Zeige, daß V die direkte Summe von V_1 und V_2 ist.

(c) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis. Berechne die Matrix dieser Abbildung bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$.

(d) Es sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und es seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zwei Vektoren, so daß

$$L(v) = \lambda v \qquad L(w) = \mu w \qquad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \neq \mu$$

Bilden die Vektoren v, w immer eine Basis von $\mathbb{R}^2$?