Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

11. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

MINITEST

(T 1) **Für den Rang** $\mathrm{rank}\phi$ **einer linearen Abbildung** $\phi : V \to W$ **gilt**

☐ $\mathrm{rank}\phi \leq \dim(W)$ ☐ $\mathrm{rank}\phi \leq \dim(V)$ ☐ $\mathrm{rank}\phi \leq \dim(\ker\phi)$ ☐ $\mathrm{rank}\phi \leq \dim(\mathrm{Im}\phi)$

(T 2)

Es seien $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ und B gehe aus A durch elementare Zeilenumformungen hervor. Welche der folgenden Aussagen ist (oder sind) falsch?

☐ $\det A = 0 \Leftrightarrow \det B = 0$ ☐ $\det A = \det B$ ☐ $\exists \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\} : \det A = \lambda \det B$

(T 3) $\mathbf{det} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} =$

☐ 0 ☐ λ ☐ λ^3 ☐ 9λ ☐ λ^9

(G 1)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellwertigen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

Es ist

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda - 2 & (\lambda-3)(3-\lambda)+1 \\ 0 & 2-\lambda & 2\lambda - 4 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2) \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda^2 + 6\lambda - 8 \\ -1 & 2\lambda - 4 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2)(2\lambda - 4 - \lambda^2 + 6\lambda - 8) \\
&= -(\lambda - 2)^2(\lambda - 6).
\end{aligned}$$

Eigenwerte von A sind daher $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 6$. Die Eigenvektoren von A zu $\lambda_1 = 2$ berechnen sich durch Lösen des homogenen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Eigenvektoren von A zu $\lambda_2 = 6$ berechnen sich ebenso:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(G 2)

Es sei A eine quadratische Matrix.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenräume haben.

LÖSUNG:

(a) Es sei λ Eigenwert von A. Dann ist $\det(A - \lambda E) = 0$. Da die Determinante invariant bzgl. Transponieren ist, gilt damit $\det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)^T = 0$. Es ist $(A - \lambda E)^T = A^T - (\lambda E)^T = (A^T - \lambda E)^T = A^T - \lambda E$. Somit ist $\det(A^T - \lambda E) = 0$ und λ ist auch Eigenwert von A^T.

(b) Die Aussage lässt sich folgendes Gegenbeispiel wiederlegen. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

dann hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 + 2 = 3$ und $\lambda_2 = 1 - 3 = -2$. Zu diesen gehören die Eigenräume

$$U_{\lambda_1} = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad U_{\lambda_2} = \{\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Es hat

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

zwar auch die Eigenwerte $\lambda = \frac{1 \pm 5}{2}$, also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$, aber die Eigenräume sind

$$U_{\lambda_1} = \{\alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad U_{\lambda_2} = \{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(G 3)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

LÖSUNG:

(a)

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)\cdot((-1-\lambda)(2-\lambda)+2(2-\lambda)) + 2\cdot(-3(2-\lambda)+3(2-\lambda))$$
$$= -(2-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda).$$

Also ist $P_A(\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$.

(b) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Die zu λ_i gehörenden Eigenvektoren ergeben sich als Lösung der Gleichungssysteme $(A-\lambda_i E)v_i = 0$, $i = 1,2,3$. Zu beachten ist noch, daß der Nullvektor per Definition nie ein Eigenvektor ist.

$\underline{\lambda_1 = -1}$: In diesem Fall ist $(A+E)v_1 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist

$$v_1 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$: Hier ist $(A-E)v_2 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit

$$v_2 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_3 = 2}$: Jetzt ist $(A-2E)v_3 = 0$ zu betrachten.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$v_3 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(c) Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(G 4)

Beweisen Sie folgende Aussagen für eine komplexe Matrix A:

(a) λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ ist Eigenwert von A.

(b) A ist regulär $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind von Null verschieden.

(c) Ist A regulär, so gilt:
λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von A^{-1}.

(d) λ ist Eigenwert von $A \Rightarrow \lambda^k$ ist Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

LÖSUNG:

(a) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$
Da p_A ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist, gilt $p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow p_A(\bar{\lambda}) = 0$ (vgl. Satz 3.3, Seite 53).

(b) Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte von A.
A ist regulär $\Leftrightarrow$ Det(A)$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$
(vgl. Satz 4.3, Seite 169 & Lemma 6.3, Seite 184)

(c) Sei A regulär. Dann ist A invertierbar und alle Eigenwerte von A sind von Null verschieden (vgl. b)).
Sei λ ein Eigenwert von A und x ein zugehöriger Eigenvektor, d.h. $Ax = \lambda x$. Dann gilt:

$$x = A^{-1}\lambda x = \lambda A^{-1}x$$

und somit

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x,$$

d.h. $\frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von A^{-1}.

(d) Sei λ Eigenwert von A und x ein zugehöriger Eigenvektor, d.h. $Ax = \lambda x$.
Wir zeigen:

$$A^k x = \lambda^k x \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}$$

mittels vollständiger Induktion (dann ist λ^k Eigenwert von A^k mit Eigenvektor x).
Induktionsanfang, $k = 1$: Es gilt $Ax = \lambda x$ (s.o.).
Induktionsannahme für $k \in \mathbb{N}$: Es gelte $A^k x = \lambda^k x$.
Induktionsschritt:

$$A^{k+1}x = AA^k x = A\lambda^k x = \lambda^k Ax = \lambda^k \lambda x = \lambda^{k+1}x$$

Hausübungen

(A 14) Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

LÖSUNG:

(a) Es gilt $\det(A - \lambda E) = (4-\lambda)(1-\lambda)^2$, also $p_A(\lambda) = (\lambda - 4)(1-\lambda)^2$.

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, als zugehörige Eigenvektoren berechnet man

$$v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Die Matrix ist nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix. Eine Transformationsmatrix T mit den gewünschten Eigenschaften kann nicht gebildet werden. (Nur 2 Eigenvektoren vorhanden, 3 wären aber nötig.)

(A 15) (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass sich die charakteristische Gleichung einer 2×2-Matrix A als

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A) = 0$$

schreiben lässt.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen der charakteristischen Gleichung für eine reellwertige Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix A keine, ein oder zwei reelle Eigenwerte?

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind für den Fall, dass A reelle Eigenwerte hat.

(d) Berechnen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a + b = c + d$ die Eigenwerte von A und zeigen Sie, dass sie ganzzahlig sind.

LÖSUNG:

(a) Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E_2) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\
&= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\
&= \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
&= \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A).
\end{aligned}$$

(b) Durch eine quadratische Ergänzung löst man die Gleichung nach λ auf und erhählt:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A) - 4\det(A)}\right)$$

bzw.

$$\lambda = \frac{1}{2}\left((a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right).$$

Damit besitzt A

1. für $(a-d)^2 + 4bc > 0$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte,
2. für $(a-d)^2 + 4bc = 0$ einen reellen Eigenwert,
3. für $(a-d)^2 + 4bc < 0$ keinen reellen Eigenwert.

(c) Es ist zu zeigen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a-\lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -b \\ a-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

was äquivalent ist zu:

$$\begin{pmatrix} -b\lambda_1 \\ ad-cb-d\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\lambda_1 \\ \lambda_1 a-\lambda_1^2 \end{pmatrix}.$$

Die erste Zeile ist bereits ok, nur um die Gleichheit in der zweiten Zeile einzusehen, müssen wir noch ein wenig arbeiten. Es ist einerseits

$$\lambda_1^2 = cb + \frac{1}{2}(a^2+d^2) + \frac{1}{2}(a+d)\sqrt{a^2-2ad+d^2+4cb}$$

und damit

$$\lambda_1 a - \lambda_1^2 = \frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}d^2 - cb - \frac{1}{2}d\sqrt{a^2-2ad+d^2+4cb}.$$

Anderseits ist

$$ad-cb-d\lambda_1 = ad-cb-\frac{1}{2}d(a+d+\sqrt{a^2-2ad+d^2+4cb}),$$

also ist auch die zweite Zeile gleich. Analog rechnet man für λ_2.

(d) Mit $a-d=c-b$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}\left((a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((a+d) \pm \sqrt{(c-b)^2+4bc}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((a+d) \pm (c+b)\right). \end{aligned}$$

Mit $d=a+b-c$ ist also $\lambda_1 = a+b \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_2 = a-c \in \mathbb{Z}$.

(A 16) (10 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $B_\lambda = A - \lambda E_2$. Berechne Werte λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so daß $\det(B_{\lambda_i}) = 0$.

(b) Finde Vektoren v_1 und v_2, die $V_1 := \ker B_{\lambda_1}$ bzw. $V_2 := \ker B_{\lambda_2}$ erzeugen. Zeige, daß V die direkte Summe von V_1 und V_2 ist.

(c) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis. Berechne die Matrix dieser Abbildung bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$.

(d) Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zwei Vektoren, so daß

$$L(v) = \lambda v \qquad L(w) = \mu w \qquad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \neq \mu$$

Bilden die Vektoren v, w immer eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

LÖSUNG:

(a) Es ist

$$\det B = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 6 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(5-\lambda)+12 = \lambda^2-3\lambda+2 = (\lambda-1)(\lambda-2),$$

also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

(b) Um die Kerne zu bestimmen, erhält man mit Gauss–Jordan-Elimination

$$B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher kann man $v_1 = \binom{2}{1}$ und $v_2 = \binom{3}{2}$ wählen. v_1 und v_2 sind linear unabhängig, daher ist $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$. Also ist V die direkte Summe von V_1 und V_2.

(c) Die Übergangsmatrix von der Standardbasis zur Basis B' ist

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnet man die gesuchte Matrix A' als

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Ja, da Eigenvektoren zu verschiedenen EW immer linear unabhängig sind.