Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 20./21.12.07

Lineare Algebra I

10. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A, A^T, A^{-1}, A^2, $A \cdot A^T$ und $A + A^T$.

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimme die Determinante von $A - t\,E_4$ und zeige, dass es sich dabei um ein Polynom in t von der Form

$$\det(A - t\,E_4) = -t^3 - \operatorname{tr}(A) \cdot t^2 + a \cdot t + \det(A)$$

mit einem geeigneten Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$ handelt.

(G 2)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Sei $f : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$ eine multilineare Abbildung, d.h. f ist linear in jeder Spalte. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist alternierend.

(b) Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit zwei gleichen Spalten gilt $f(A) = 0$.

(G 3)

(a) Zeigen Sie, dass die Determinantenabbildung $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \setminus \{\,0\,\}$, $A \mapsto \det A$ ein Gruppen-Homomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrizen mit Determinante 1

$$\mathrm{Sl}_n(\mathbb{K}) := \left\{\, A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1 \,\right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ ist. Diese Untergruppe heißt *spezielle lineare Gruppe*.

Hausübungen

(A 29) (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und bestimme für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Dimensionen des Bildes und des Kerns der Matrix A_α.

(A 30) Cramersche Regel (10 Punkte)

Wir betrachten das Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{K}^n$. Wir wollen dieses System lösen ohne direkt die Inverse von A zu berechnen. Hierzu bezeichnen wir mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^n$ die Spalten von A, d.h. $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Sei $x \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung des Gleichungssystems. Wir bezeichnen mit B_i die Matrix, welche aus A entsteht, indem die i-te Spalte durch b ersetzt wird. Weiter bezeichnen wir mit X_i die Matrix welche aus der Einheitsmatrix E_n ensteht, indem die i-te Spalte durch x ersetzt wird.

(a) Zeigen Sie $B_i = AX_i$.

(b) Zeigen Sie $\det X_i = x_i$.

(c) Folgern Sie damit $x_i = (\det B_i)/(\det A)$.

(d) Bestimmen Sie damit alle Lösungen x des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(A 31) (10 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen $V := \mathbb{K}^{n \times n}$ und eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wir definieren eine Abbildung

$$f_B : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}^{n \times n}, \quad f_B(A) := AB - BA\ .$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung f_B linear ist mit $\det f_B = 0$.