Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 20./21.12.07

Lineare Algebra I

10. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A, A^T, A^{-1}, A^2, $A \cdot A^T$ und $A + A^T$.

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimme die Determinante von $A - t\,E_4$ und zeige, dass es sich dabei um ein Polynom in t von der Form

$$\det(A - t\,E_4) = -t^3 - \operatorname{tr}(A) \cdot t^2 + a \cdot t + \det(A)$$

mit einem geeigneten Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$ handelt.

LÖSUNG: (a)

$$\begin{aligned}
\det A &= 1(0+9) - 2(0-3) + 1(-6) = 9 \\
\det(A^T) &= \det A = 9 \\
\det(A^{-1}) &= \det(A)^{-1} = \frac{1}{9} \\
\det(A^2) &= (\det A) \cdot (\det A) = 9^2 \\
\det(A \cdot A^T) &= (\det A) \cdot (\det A^T) = 9^2 \\
\det(A + A^T) &= \det(0) = 0
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\det(A - tE_4) &= \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ -2 & -t & -3 \\ -1 & 3 & -t \end{vmatrix} \\
&= (1-t)(t^2+9) - 2(2t-3) + 1(-6-t) = -t^3 + t^2 - 14t + 9
\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{tr}(A) = 1$ und $\det(A) = 9$ zeigt dies die Behauptung.

(G 2)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Sei $f : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ eine multilineare Abbildung, d.h. f ist linear in jeder Spalte. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist alternierend.

(b) Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit zwei gleichen Spalten gilt $f(A) = 0$.

LÖSUNG: I. Wir zeigen zuerst die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$. Sei also f alternierend und A eine Matrix mit zwei gleichen Spalten. Weil bei Spaltenvertauschungen unter nur das Vorzeichen unter f wechselt, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die ersten beiden Spalten von A gleich sind, d.h. $A = (a_1|a_1|a_3|\dots|a_n)$ mit Spalten $a_1, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$. Bezeichnen wir mit A' die Matrix, die aus A durch Vertauschen der ersten beiden Spalten entsteht, so gilt $f(A) = -f(A')$, weil f alternierend ist. Nun gilt jedoch $A = A'$, d.h. $f(A) = -f(A)$ und folglich $f(A) = 0$.

II. Wir zeigen nun die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$. Die Abbildung f erfülle also die Eigenschaft (b). Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix. Wir müssen zeigen, dass sich beim Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen unter f ändert. Wir bezeichnen hierzu mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$ die Spalten von A, d.h. $A = (a_1|\dots|a_n)$. Für $1 \le i, j \le n$ bezeichen wir mit $A_{i,j}$ die Matrix, welche aus A ensteht, indem die i-te und die j-te Spalte vertauscht werden. Seien $1 \le i < j \le n$. Wir bezeichnen mit B_1 die Matrix, die aus A ensteht, indem wir die j-te Spalte durch a_i ersetzen. In der Matrix B_1 sind dann zwei Spalten gleich und somit

$$f(\dots|a_i|\dots|a_i + a_j|\dots) = f(A) + f(B_1) = f(A) + 0 = f(A)\,.$$

Völlig analog folgt

$$f(\dots|a_j|\dots|a_i + a_j|\dots) = f(A_{i,j})$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= f(\dots|a_i + a_j|\dots|a_i + a_j|\dots) \\ &= f(\dots|a_i|\dots|a_i + a_j|\dots) + f(\dots|a_j|\dots|a_i + a_j|\dots) = f(A) + f(A_{i,j}) \end{aligned}$$

und folgich $f(A) = -f(A_{i,j})$.

(G 3)

(a) Zeigen Sie, dass die Determinantenabbildung $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \setminus \{0\},\ A \mapsto \det A$ ein Gruppen-Homomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrizen mit Determinante 1

$$\mathrm{Sl}_n(\mathbb{K}) := \{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det A = 1 \}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ ist. Diese Untergruppe heißt *spezielle lineare Gruppe*.

LÖSUNG: (a) Es gilt $\det(E_n) = 1$, und für alle $A, B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ gilt $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

(b) Die Menge $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{K})$ ist der Kern der Abbildung $\det : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und somit eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$.

Hausübungen

(A 29) (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und bestimme für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Dimensionen des Bildes und des Kerns der Matrix A_α.

LÖSUNG: Wir berechnen die Determinante von A_α durch Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det A = 1(0-4) - \alpha(\alpha - 2\alpha) = \alpha^2 - 4\ .$$

Ist $\alpha \notin \{\,2, -2\,\}$, so ist die Matrix A_α invertierbar. Damit ist ihr Bild ganz $\mathbb{R}^3$, hat also Dimension 3, und ihr Kern trivial, hat also Dimension 0.
Ist $\alpha = 2$, so hat A die Gestalt

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

Man sieht sofort, dass die oberen beiden Zeilen linear unabhängig sind und sich die unterste Zeile durch Addition der oberen beiden Zeilen ergibt. Der (Zeilen-)Rang von A ist deshalb 2, d.h. $\dim \operatorname{im} A = 2$. Nach der Rangformel gilt somit $\dim \ker A = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{im} A = 3 - 2 = 1$.
Ist $\alpha = -2$, so hat A die Gestalt

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\ .$$

Auch hier sieht man sofort, dass die oberen beiden Zeilen linear unabängig sind uns sich die unterste Zeile durch Negation der Summe der oberen beiden Zeilen ergibt. Der Rang von A ist deshalb 2, d.h. $\dim \operatorname{im} A = 2$. Analog folgt $\dim \ker A = 1$.

(A 30) Cramersche Regel (10 Punkte)

Wir betrachten das Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{K}^n$. Wir wollen dieses System lösen ohne direkt die Inverse von A zu berechnen. Hierzu bezeichnen wir mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^n$ die Spalten von A, d.h. $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Sei $x \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung des Gleichungssystems. Wir bezeichnen mit B_i die Matrix, welche aus A entsteht, indem die i-te Spalte durch b ersetzt wird. Weiter bezeichnen wir mit X_i die Matrix welche aus der Einheitsmatrix E_n ensteht, indem die i-te Spalte durch x ersetzt wird.

(a) Zeigen Sie $B_i = AX_i$.

(b) Zeigen Sie $\det X_i = x_i$.

(c) Folgern Sie damit $x_i = (\det B_i)/(\det A)$.

(d) Bestimmen Sie damit alle Lösungen x des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG: (a)

$$AX_i = (a_1|\ldots|a_n)(e_1|\ldots|x|\ldots|e_n) = (a_1|\ldots|Ax|\ldots|a_n) = (a_1\ldots|b|\ldots|a_n) = B_i$$

(b)

$$\det X_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & x_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot x_i \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = x_i$$

(c)

$$(\det A)\cdot x_i = (\det A)\cdot(\det X_i) = \det(A\cdot X_i) = \det(B_i)$$

(d) In Aufgabe A29 haben wir bereits die Determinante von $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ zu $\det A = 1^2 - 4 = -3$ bestimmt. Weiter gilt

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B_1 = -4 \qquad \det B_2 = 1 \qquad \det B_3 = -1$$

Und somit ist die Lösung durch $x = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$ gegeben.

(A 31) (10 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum der $(n\times n)$-Matrizen $V := \mathbb{K}^{n\times n}$ und eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Wir definieren eine Abbildung

$$f_B : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}, \quad f_B(A) := AB - BA\ .$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung f_B linear ist mit $\det f_B = 0$.

LÖSUNG: Für alle Matrizen $A_1, A_2 \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned} f_B(A_1 + A_2) &= (A_1 + A_2)B - B(A_1 + A_2) = A_1B + A_2B - BA_1 - BA_2 \\ &= (A_1B - BA_1) + (A_2B - BA_2) = f_B(A_1) + f_B(A_2)\ , \\ f_B(\lambda A_1) &= (\lambda A_1)B - B(\lambda A_1) = \lambda A_1 B - \lambda B A_1 = \lambda(A_1B - BA_1) = \lambda f_B(A_1)\ . \end{aligned}$$

Die Abbildung f_B ist somit linear.

Für die Matrix $E_n \neq 0$ gilt $f_B(E_n) = E_nB - BE_n = B - B = 0$. Somit hat die Abbildung f_B einen nicht-trivialen Kern, ist also nicht injektiv. Insbesondere ist sie nicht invertierbar und folglich gilt $\det f_B = 0$.