**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

# Lineare Algebra I

## 1. Übung

### Gruppenübungen

**(G 1)**

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 200x_2 & = & 100 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}$$

**(G 2)**

Eine Schweinefarm verwendet Futter, welches aus zwei Komponenten $F_1$ und $F_2$ besteht. Der Protein- und Fettanteil (in Einheitem pro Kilogrammm) in diesen Komponenten ist in der folgenden Tabelle aufgeführt:

| Komponente | Protein | Fett |
|---|---|---|
| $F_1$ | 3 | 1 |
| $F_2$ | 2 | 5 |

(a) Wieviel Kilogramm der einzelnen Komponenten ist jeweils notwendig um 22 Einheiten Protein und 16 Einheiten Fett zu erhalten? Stellen Sie zuerst ein Gleichungssytem auf, welches die Aufgabe wiederspiegelt.

(b) Kann man die Komponenten derart mischen, daß man 9 Proteineinheiten und 29 Fetteinheiten erhält? Stellen Sie zuerst ein Gleichungssytem auf, welches die Aufgabe wiederspiegelt.

(c) Im Winter wird der Proteinanteil auf 46 Einheiten und der Fettanteil auf 18 Einheiten erhöht. Hierfür werden neue Futterkomponenten $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}_2$ benutzt, welche nur einen Fettanteil von 1 Einheit pro Kilogramm haben. Welche Mengen der neuen Komponenten werden benötigt? Stellen Sie zuerst ein Gleichungssytem auf, welches die Aufgabe wiederspiegelt.

**(G 3)**

Es seien $(x_1,x_2,x_3) = (2,3,5)$ und $(x_1,x_2,x_3) = (7,11,13)$ Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & 0\ . \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & 0 \end{array}$$

mit reellen Koeffizienten $a_{ij}$, $1 \leq i,j \leq 3$. Beweisen Sie, daß auch $(x_1,x_2,x_3) = (2+7,3+11,5+13) = (9,14,18)$ eine Lösung ist.

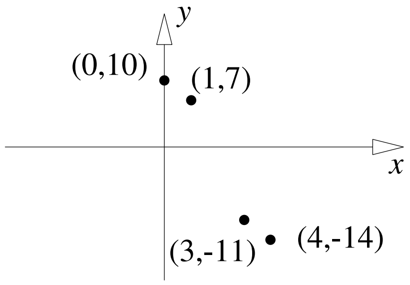
**(G 4)**

Geben Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 9x_1 & + & 10x_2 & + & 11x_3 & + & 13x_4 & = & 1 \end{array}$$

**(G 5)**

Nachstehende Abbildung zeigt vier Punkte auf dem Graphen der kubischen Gleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Man bestimme die Koeffizienten $a, b, c$ und $d$ und skizziere den Graphen.




## Hausübungen

**(A 1) (10 Punkte)**

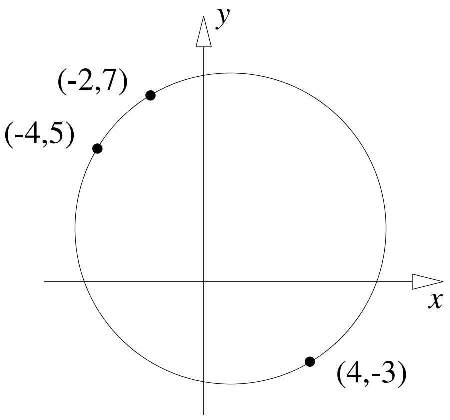
Untersuchen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$, ob das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & c \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

lösbar ist. Bestimmen Sie, falls möglich, die Lösungsmenge.

**(A 2) (10 Punkte)**

Drei Punkte in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen einen eindeutig festgelegten Kreis. Ein Kreis in der $xy$-Ebene wird durch eine Gleichung der Form $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ beschrieben. Man bestimme eine Gleichung für den Kreis in der folgenden Abbildung:




**(A 3) (10 Punkte)**

Ein Tierzuchtbetrieb verwendet Futter, das aus den drei Futtermitteln $F_1, F_2, F_3$ gemischt wird. Der Anteil (in Mengeneinheiten ME pro kg) der einzelnen Futtermittel an Eiweiss, Kohlehydraten und Fett entnimmt man der folgenden Tabelle:

| Futter | Eiweiss | Kohlehydrate | Fett |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | 2 | 3 | 1 |
| $F_2$ | 3 | 2 | 5 |
| $F_3$ | 1 | 3 | 1 |

(a) Wieviel Kilogramm von $F_1, F_2, F_3$ sind für die Mischungen zu verwenden, wenn das Mischfutter 80 ME Eiweiss, 122 ME Kohlehydrate, 45 ME Fett enthalten soll?

(b) Ist mit $F_1, F_2, F_3$ auch ein Mischfutter zu realisieren, das 90 ME Eiweiss, 120 ME Kohlehydrate und 50 ME Fett enthält?

(c) Im Winter wird der Eiweissgehalt des Mischfutters auf 85 ME, der Fettgehalt auf 50 ME erhöht, der Kohlehydrateanteil auf 120 ME reduziert. Statt $F_2, F_3$ werden Futtermittel $\tilde{F}_2, \tilde{F}_3$ verwendet, die pro Kilogramm nur 1 ME Kohlehydrate enthalten. Wie gross muss der Anteil an $\tilde{F}_2$ in der Mischung sein, wenn diese mindestens 39 kg $F_1$ und mindestens 1 kg $\tilde{F}_3$ enthalten soll?