Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

Lineare Algebra I

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 200x_2 & = & 100 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}$$

Lösung:

Aus der zweiten Zeile folgt $x_1 = 1 - x_2$. Damit folgt aus der ersten Zeile $x_2 = \frac{100-1}{200-1} = \frac{99}{199}$. Daher ist

$$x = \left(\frac{100}{199}, \frac{99}{199}\right)$$

die gesuchte Lösung.

(G 2)

Eine Schweinefarm verwendet Futter, welches aus zwei Komponenten F_1 und F_2 besteht. Der Protein- und Fettanteil (in Einheitem pro Kilogrammm) in diesen Komponenten ist in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Komponente	Protein	Fett
F_1	3	1
F_2	2	5

(a) Wieviel Kilogramm der einzelnen Komponenten ist jeweils notwendig um 22 Einheiten Protein und 16 Einheiten Fett zu erhalten? Stellen Sie zuerst ein Gleichungssytem auf, welches die Aufgabe wiederspiegelt.

(b) Kann man die Komponenten derart mischen, daß man 9 Proteineinheiten und 29 Fetteinheiten erhält? Stellen Sie zuerst ein Gleichungssytem auf, welches die Aufgabe wiederspiegelt.

(c) Im Winter wird der Proteinanteil auf 46 Einheiten und der Fettanteil auf 18 Einheiten erhöht. Hierfür werden neue Futterkomponenten $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}_2$ benutzt, welche nur einen Fettanteil von 1 Einheit pro Kilogramm haben. Welche Mengen der neuen Komponenten werden benötigt? Stellen Sie zuerst ein Gleichungssytem auf, welches die Aufgabe wiederspiegelt.

Lösung:

(a) Es muß das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_2 = 22 \quad , \quad x_1 + 5x_2 = 16 \\ \iff \quad & 3(16 - 5x_2) + 2x_2 = 22 \quad , \quad x_1 = 16 - 5x_2 \\ \iff \quad & 26 = 13x_2 \quad , \quad x_1 = 16 - 5x_2 \\ \iff \quad & x_2 = 2 \quad , \quad x_1 = 6 \end{aligned}$$

Die gesuchte Mischung enthält 6 kg der ersten Futterkomponente und 2 kg der zweiten Komponente.

(b) Es muß das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_2 = 9 \quad , \quad x_1 + 5x_2 = 29 \\ \iff \quad & 3(29 - 5x_2) + 2x_2 = 9 \quad , \quad x_1 = 29 - 5x_2 \\ \iff \quad & 78 = 13x_2 \quad , \quad x_1 = 29 - 5x_2 \\ \iff \quad & x_2 = 6 \quad , \quad x_1 = -1 \quad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Da negative Anteile (in Kilogramm) beim Futtermischen nicht möglich sind, lassen sich die Komponenten nicht wie gewünscht mischen.

(c) Es muß das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_2 = 46 \quad , \quad x_1 + x_2 = 18 \\ \iff \quad & 3(18 - x_2) + 2x_2 = 46 \quad , \quad x_1 = 18 - x_2 \\ \iff \quad & 8 = x_2 \quad , \quad x_1 = 18 - x_2 \\ \iff \quad & x_2 = 8 \quad , \quad x_1 = 10. \end{aligned}$$

Die gesuchte Mischung enthält 10 kg der ersten Futterkomponente und 8 kg der zweiten Komponente.

(G 3)

Es seien $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 5)$ und $(x_1, x_2, x_3) = (7, 11, 13)$ Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & 0 \; . \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & 0 \end{array}$$

mit reellen Koeffizienten a_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$. Beweisen Sie, daß auch $(x_1, x_2, x_3) = (2 + 7, 3 + 11, 5 + 13) = (9, 14, 18)$ eine Lösung ist.

(G 4)

Geben Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 9x_1 & + & 10x_2 & + & 11x_3 & + & 13x_4 & = & 1 \end{array}$$

Lösung:

Zieht man von der zweiten Zeile das fünffache der ersten Zeile ab und von der dritten Zeile das neunfache der ersten, so erhlt man

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 8x_3 & - & 12x_4 & = & -4 \\ & - & 8x_2 & - & 16x_3 & - & 23x_4 & = & -8. \end{array}$$

Nun kann man von der dritten Zeile das zweifache der zweiten Zeile abziehen und erhlt

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 8x_3 & - & 12x_4 & = & -4 \\ & & & & & - & x_4 & = & 0\,. \end{array}$$

Daraus folt $x_4 = 0$. Im verbleibenden System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 8x_3 & = & -4 \end{array}$$

kann man x_2 oder x_3 frei wählen, z.B. sei $x_3 := t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann folgt aus der letzten Gleichung $x_2 = 1 - 2t$ und damit aus der ersten Gleichung $x_1 = -1 + t$.

(G 5)

Nachstehende Abbildung zeigt vier Punkte auf dem Graphen der kubischen Gleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Man bestimme die Koeffizienten a, b, c und d und skizziere den Graphen.

y

(0,10) (1,7)

x

(3,-11) (4,-14)

LÖSUNG:

Wir setzen die Punkte $(0, 10), (1, 7), (3, -11), (4, -14)$ für x und y nacheinander in die Gleichung ein und erhalten somit das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & & & d & = & 10 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 7 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & -11 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & -14 \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung lesen wir sofort $d = 10$ ab. Dadurch vereinfacht sich unser Gleichungssystem zu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & -3 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & = & -21 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & = & -24 \end{array}$$

Auf Zeilenstufenform gebracht hat diese Matrix dann folgende Gestalt:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & -3 \\ & - & 18b & - & 24c & = & 60 \\ & & & & 4c & = & 8 \end{array}$$

Man erhält somit $a = 1, b = -6, c = 2, d = 10$.

Hausübungen

(A 1) (10 Punkte)

Untersuchen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$, ob das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & c \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

lösbar ist. Bestimmen Sie, falls möglich, die Lösungsmenge.

LÖSUNG:

Durch Anwenden des Gauss-Jordan-Verfahrens erhalten wir folgende Zeilenstufenform

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & c \\ & & & & 0 & = & 1 - \frac{1}{2}c \end{array}$$

Somit ist das Gleichungssystem nur lösbar, wenn $c = 2$ gilt. In diesem Falle ist $x_3 = t \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar. Wir erhalten dann $x_2 = 1 - t$ und $x_1 = -1 + 4t$.

(A 2) (10 Punkte)

Drei Punkte in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen einen eindeutig festgelegten Kreis. Ein Kreis in der xy-Ebene wird durch eine Gleichung der Form $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ beschrieben. Man bestimme eine Gleichung für den Kreis in der folgenden Abbildung:

(-2,7)

(-4,5)

y

x

(4,-3)

Lösung:

Wir setzen die drei Punkte $(-4, 5), (-2, 7), (4, -3)$ nacheinander in die Kreisgleichung ein und erhalten dadurch das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -4a & + & 5b & + & c & = & -41 \\ -2a & + & 7b & + & c & = & -53 \\ 4a & - & 3b & + & c & = & -25 \end{array}$$

Durch Umformungen nach Gauss-Jordan ergibt sich folgende Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -4a & + & 5b & + & c & = & -41 \\ & & 2b & + & 2c & = & -66 \\ & & & - & 4c & = & 116 \end{array}$$

Wir erhalten somit $a = -2, b = -4, c = -29$ als Koeffizienten der Kreisgleichung.

(A 3) (10 Punkte)

Ein Tierzuchtbetrieb verwendet Futter, das aus den drei Futtermitteln F_1, F_2, F_3 gemischt wird. Der Anteil (in Mengeneinheiten ME pro kg) der einzelnen Futtermittel an Eiweiss, Kohlehydraten und Fett entnimmt man der folgenden Tabelle:

Futter	Eiweiss	Kohlehydrate	Fett
F_1	2	3	1
F_2	3	2	5
F_3	1	3	1

(a) Wieviel Kilogramm von F_1, F_2, F_3 sind für die Mischungen zu verwenden, wenn das Mischfutter 80 ME Eiweiss, 122 ME Kohlehydrate, 45 ME Fett enthalten soll?

(b) Ist mit F_1, F_2, F_3 auch ein Mischfutter zu realisieren, das 90 ME Eiweiss, 120 ME Kohlehydrate und 50 ME Fett enthält?

(c) Im Winter wird der Eiweissgehalt des Mischfutters auf 85 ME, der Fettgehalt auf 50 ME erhöht, der Kohlehydrateanteil auf 120 ME reduziert. Statt F_2, F_3 werden Futtermittel $\tilde{F}_2, \tilde{F}_3$ verwendet, die pro Kilogramm nur 1 ME Kohlehydrate enthalten. Wie gross muss der Anteil an $\tilde{F}_2$ in der Mischung sein, wenn diese mindestens 39 kg F_1 und mindestens 1 kg $\tilde{F}_3$ enthalten soll?

Lösung:

Die Mischung bestehe aus x_1 kg F_1, x_2 kg F_2, x_3 kg F_3.

(a) Es ist zu fordern:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 80 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 122 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 45 \end{array}$$

Mit dem Gauss-Jordan-Verfahren erhalten wir folgende Zeilenstufenform

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 80 \\ & - & \frac{5}{2}x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & 2 \\ & & & & \frac{13}{5}x_3 & = & \frac{39}{5} \end{array}$$

und damit als Ergebnis: $x_1 = 37, x_2 = 1, x_3 = 3$.

(b) Das Gleichungssystem der Aufgabe a) hat in diesem Fall die rechte Seite $(90, 120, 50)^T$. Die Zeilenstufenform sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 80 \\ & - & \frac{5}{2}x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & -15 \\ & & & & \frac{13}{5}x_3 & = & -16 \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich

$$x_2 = \frac{30}{13},\ x_1 = \frac{580}{13},\ x_3 = -7x_2 + 10 = -\frac{80}{13} < 0.$$

Somit ist in Mischfutter der geforderten Zusammensetzung mit F_1, F_2, F_3 nicht zu realisieren.

(c) Die Mischung bestehe jetzt aus $\tilde{x}_1$ kg F_1, $\tilde{x}_2$ kg $\tilde{F}_2$, $\tilde{x}_3$ kg $\tilde{F}_3$. Dann muss gelten:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\tilde{x}_1 & + & 3\tilde{x}_2 & + & \tilde{x}_3 & = & 85 \\ 3\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & + & \tilde{x}_3 & = & 120 \\ \tilde{x}_1 & + & 5\tilde{x}_2 & + & \tilde{x}_3 & = & 50 \end{array}$$

Das Gauss-Jordan-Verfahren führt auf folgende Zeilenstufenform

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\tilde{x}_1 & + & 3\tilde{x}_2 & + & \tilde{x}_3 & = & 85 \\ & - & \frac{7}{2}\tilde{x}_2 & - & \frac{1}{2}\tilde{x}_3 & = & -\frac{15}{2} \end{array}$$

Als Lösung dieses Systems ergibt sich z.B.: $\tilde{x}_2$ beliebig, $\tilde{x}_3 = -7\tilde{x}_2 + 15\,(*)$, $\tilde{x}_1 = 35 + 2\tilde{x}_2\,(**)$. Wegen der Forderung $\tilde{x}_1 \geq 39$ und $\tilde{x}_3 \geq 1$ muss nach $(*)\ \tilde{x}_2 \leq 2$, nach $(**)\ \tilde{x}_2 \geq 2$ sein. Folglich ist $\tilde{x}_2 = 2$ und damit $\tilde{x}_3 = 1, \tilde{x}_1 = 39$ zu wählen.