DISKRETE MATHEMATIK Prof. Dr. Thomas Ihringer
Aufgabenblatt Nr. 13

181. Berechne Δx^3 und $\Delta^2 x^3$. Welche Wert hat $\Delta^2 x^3$ für $x=0$?

182. a) Stelle das Polynom x^3 als Linearkombination der Polynome $x^{\underline{k}}$ dar.
b) Berechne eine diskrete Stammfunktion von x^3.

183. Berechne $\sum_{k=1}^{n} k^3$. (Es ergibt sich ein Polynom in n.)

184. Beweise die diskrete Produktregel:
$$\Delta(f(x)\,g(x)) = (\Delta f(x))\,g(x+1) + f(x)\,\Delta g(x).$$

---

185. Wieviele der Zahlen $1,\dots,100$ sind weder durch 2, noch durch 3, noch durch 5 teilbar?

186. Von insgesamt 20 Matheprofs spielen 12 Skat, 13 Schach, 10 Fußball. Genau zwei dieser Hobbies haben 9 von ihnen. Wieviele gibt es mindestens, die allen drei Hobbies nachgehen? Wiele höchstens?

187. Beweise: Die geordnete Menge $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$ aller Teilmengen einer endlichen Menge I hat die folgende Möbiusfunktion:
$$\mu(X,Y) = (-1)^{|Y\setminus X|} \text{ für } X \subseteq Y \text{ (und } \mu(X,Y)=0 \text{ sonst).}$$

188. Sei $(P,\leq)$ eine Kette (d.h. eine linear geordnete Menge). Zeige:
$\mu(x,y)=1$ falls $x=y$, $\mu(x,y)=-1$ falls y oberer Nachbar von x,
$\mu(x,y)=0$ sonst.

---

189. Bekanntlich gilt $m^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}(k!\,S(n,k))$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ (vgl. Anhang 1.14). Verwende Binomial-Inversion, um hieraus eine Formel für $S(n,m)$ herzuleiten.

190. Bekanntlich (Buch, Anhang 1.10) gilt $n! = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)$. Leite daraus mit Stirling-Inversion eine neue Formel ab.

191. Beweise: Für die Möbius-Funktion des direkten Produkts $P\times Q$ geordneter Mengen P und Q gilt $\mu_{P\times Q} = \mu_P \cdot \mu_Q$, genauer:
$$\mu_{P\times Q}((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = \mu_P(a_1,a_2)\cdot\mu_Q(b_1,b_2).$$

192. Auf welchen unendlichen geordneten Mengen klappt Inversion?

H193. Finde alle Funktionen $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ mit $\Delta f(x) = f(x)$.

H194. Beweise im Buch angegebene „Klassische Möbius-Funktion der Zahlentheorie" auf $(\mathbb{N},|)$ (siehe Anhang 3.7).

*H195. Bestimme die Zahlen a_k aus den Gleichungen
$$n! = \sum_{k=0}^{n} a_k\, n^{\underline{k}}.$$

<u>Seminar Abzählmethoden Sommersemester 2008:</u> Nächste Woche (Donnerstag 31.1.2008) in der Vorlesung erste Vorbesprechung und Themenvergabe für das Seminar.