DISKRETE MATHEMATIK

Prof. Dr. Thomas Ihringer

Aufgabenblatt Nr. 7

91. Betrachte die Menge $G(K)$ der Abbildungen von $K\cup\{\infty\}$ in sich der Form
    $f(x) := \frac{ax+b}{cx+d}$ mit $a,b,c,d \in K$, $ad-bc \neq 0$, für $K = \mathbb{Z}_7$.
    a) Berechne Wertetabellen für $f(x) = \frac{x+2}{3x+4}$ und $g(x) = \frac{3}{2x+1}$.
    b) Berechne $f \circ g$.
    c) Bestimme eine Abbildung $h \in G(\mathbb{Z}_7)$ mit $h(0)=3$, $h(1)=0$, $h(\infty)=2$.

92. Für jede 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad-bc \neq 0$ sei $f_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ die in Aufgabe 91 beschriebene Abbildung von $K\cup\{\infty\}$ in sich. Zeige:
    a) Es gilt genau dann $f_A = f_{A'}$, wenn $A' = RA$ gilt mit $R \in K$.
    b) Für alle A, A' gilt $f_A \circ f_{A'} = f_{AA'}$, d.h. die Abbildungen multiplizieren sich wie die Matrizen.
    c) Die Abbildungen in $G(K)$ sind bijektiv und bilden eine Permutationsgruppe.

93. Zeige, daß die Permutationsgruppe $G(K)$ für jeden Körper K scharf 3-transitiv auf $K\cup\{\infty\}$ operiert.

94. Die Existenz welcher Blockpläne läßt sich Satz 4.11 aus dem Buch nachweisen, wenn man lediglich einen 2-(13,4,1) Blockplan kennt?

---

95. Wieviele Fehler sind mindestens aufgetreten, wenn beim Code mit folgenden Zeilen als Codewörtern 11100 empfangen wird? $\mathcal{C}$:
    $$\begin{matrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&1 \\ 1&0&1&1&1 \\ 1&1&0&1&0 \end{matrix}.$$

96. Bestimme das Parametertupel $[n,k,d]$ für den Code aus 1.3d im Buch.

97. Bestimme für diesen Code die kanonische Generatormatrix und die kanonische Kontrollmatrix.

98. Zeige für jeden linearen Code $\mathcal{C}$: Entweder haben alle Codewörter gerades Gewicht, oder genau die Hälfte der Codewörter hat gerades Gewicht.

---

99. Decodiere die Vektoren 01110 und 10010 mit dem Standardfeld aus 2.3 im Buch.

100. Finde für den „Repetionscode" $\mathcal{C} := \{abab \mid a,b \in F\}$ die kanonische Generatormatrix, die kanonische Kontrollmatrix, ein Standardfeld, sowie die Syndrome.

101. a) Berechne für diesen Code die Werte α_i (Anzahl der Klassenanführer von Gewicht i) und die Fehlerwahrscheinlichkeit $w(p)$ für $p = 0{,}1$.
     b) Dieselbe Frage für den Code aus Aufgabe 95.
     c) Vergleiche für beliebiges p die Fehlerwahrscheinlichkeiten in Teil a) und in Teil b). Welcher Code ist aus dieser Sicht besser?

102. Decodiere $\underline{v} = 1011101$ für den Hamming-Code $\mathcal{H}_3$ mit der Kontrollmatrix
     $$H = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}.$$

H103. a) Finde eine (13,4)-Differenzmenge.
      b) Finde eine (25,3)-Differenzmenge in $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, +)$.

H104. Beweise: Wenn es in einem linearen Code $\mathcal{C}$ ein Codewort $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ mit $c_i = 1$ gibt, dann hat genau die Hälfte der Codewörter an Stelle i eine 1.

*H105. Beweise: Ein linearer Code mit Kontrollmatrix H hat genau dann Minimalabstand d, wenn je $d-1$ Spalten von H linear unabhängig sind, es aber d linear abhängige Spalten gibt.