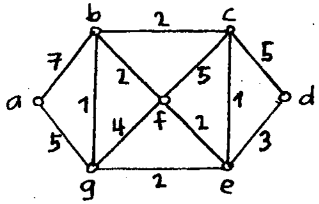
DISKRETE MATHEMATIK

Prof. Dr. Thomas Ihringer

Aufgabenblatt Nr. 5

61. Wieviele aufspannende Bäume hat der Graph a) $K_{2,3}$, b) K_4, c) K_n ?

62. Führe den Algorithmus von Kruskal für nebenstehendes Netzwerk durch. (Muß nicht streng formal erfolgen, wenn man's verstanden hat!)



63. Sei $E=\{a,b,c,d\}$. In welchen der folgenden Fälle ist $(E,\mathcal{J})$ ein Matroid?
 a) $\mathcal{J}=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{c,d\}\}$,
 b) $\mathcal{J}=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$,
 c) $\mathcal{J}=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$.

64. Sei eine endliche Menge E und eine Zahl k gegeben. Zeige, daß $(E,\mathcal{J})$ mit $\mathcal{J}:=\{T\subseteq E \mid |T|\leq k\}$ ein Matroid ist (<u>uniformes Matroid</u>).

In den Aufgaben 65–68 und H75 wird folgendes Beispiel fürs Traveling Salesman Problem untersucht werden. Die Entfernungen zwischen den Städten London, Mexico City, New York, Paris, Peking und Tokyo sind in der Tabelle in 100 Meilen angegeben:

	Lo	Mc	Ny	Pa	Pe
To	60	70	68	61	13
Pe	51	78	68	51	
Pa	2	57	36		
Ny	35	21			
Mc	56				

65. Welche der folgenden beiden Abbildungen $\mathcal{T}:\{1,\ldots,6\}\to V$ mit $V=\{Lo, Mc, Ny, Pa, Pe, To\}$ stellt eine <u>Rundreise</u> dar?

a)

i	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{T}(i)$	Lo	Mc	Ny	Lo	Pa	To

b)

i	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{T}(i)$	Lo	Mc	Ny	Pa	Pe	To

66. Berechne die Länge der Rundreise in Aufgabe 65.

67. Wende auf die Rundreise aus Aufgabe 65 2-Optimierung an. (<u>Hinweis</u>: Ersetze das Paar LoTo, NyPa durch das Paar LoPa, NyTo.) Berechne dann die Länge der neuen Rundreise.

68. Wende auf die Rundreise $\mathcal{T}_1$ aus Aufgabe 67 nochmal 2-Optimierung an, mit einem geeigneten Kantenpaar. Berechne die Länge dieser neuen Rundreise $\mathcal{T}_2$.

<u>Für die folgenden drei Aufgaben</u>: Sei P die Punktmenge eines Steiner-Tripel-Systems, d.h. eines 2-$(v,3,1)$ Blockplans. Auf P sei eine Multiplikation $\circ$ erklärt durch

$$x\circ y := \begin{cases} z & \text{falls } x\neq y,\ z \text{ dritter Punkt auf Block durch } x,y, \\ x & \text{falls } x=y. \end{cases}$$

69. Zeige, daß dann immer folgende Gleichungen gelten:

$$x\circ x = x, \qquad x\circ y = y\circ x, \qquad x\circ(x\circ y)=y.$$

70. Für $(P,\circ)$ mögen obige Gleichungen gelten. Zeige, daß es dann ein Steiner-Tripel-System mit Punktmenge P gibt.

71. Zeige: Gibt es Steiner-Tripel-Systeme mit v_1 und mit v_2 Punkten, dann gibt es auch ein Steiner-Tripel-System mit $v_1\cdot v_2$ Punkten.

72. Bestimme die Zahlen v, für die es aufgrund der Teilbarkeitsbedingungen ein Steiner-Tripel-System geben könnte.

H73. Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph. Zeige, daß $(E,\mathcal{J})$ ein Matroid ist mit $\mathcal{J}:=\{T\subseteq E \mid$ keine zwei Kanten von E haben eine gemeinsame Endecke$\}$ (<u>head-partition-Matroid</u>).

H74. Für welches λ und welches t liefert der 3-$(12,6,2)$ Blockplan aus dem Buch eine Lottosystemwette mit „λ-facher t-Garantie"? Siehe Buch S. 91 oben!

*H75. Weiter mit TSP (Aufgaben 65–68): a) Finde mit <u>Baum-Kante-Relaxation</u> eine untere Schranke für die Rundreisenlänge.
 b) Finde jetzt mit <u>branch and bound</u> eine optimale Rundreise $\mathcal{T}_{opt}$.