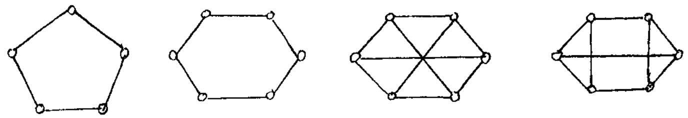
DISKRETE MATHEMATIK Prof. Dr. Thomas Ihringer

Aufgabenblatt Nr. 3

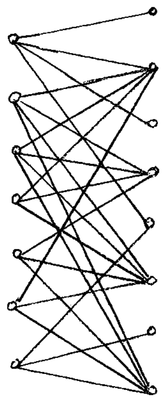
31. Welche dieser Graphen sind bipartit?



32. Beweise: ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

33. Finde in nebenstehendem bipartiten Graphen
 a) eine Heirat maximaler Mächtigkeit,
 b) eine überdeckende Eckenmenge minimaler Mächtigkeit.

S



T

34. In demselben bipartiten Graphen: Finde eine Menge $I \subseteq S$ mit $|I| > |\varphi(I)|$.

35. Schreibe die Permutationen $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 8 & 2 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ und $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 9 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ als Produkt ziffernfremder Zyklen.

36. Für dieselben Permutationen g und h: a) Berechne g^{-1}, $g \circ h$, $h \circ g$.
 b) Welche Ordnungen haben $g, h, g^{-1}, g \circ h, h \circ g$?

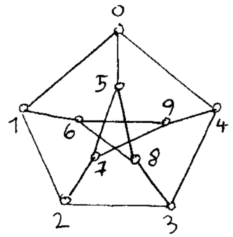
37. a) Stelle eine Verknüpfungstafel der symmetrischen Gruppe $(S_3, \circ)$ auf.
 b) Bestimme alle Untergruppen dieser Gruppe.

38. Zeige: für je zwei Elemente a, b einer Gruppe $(G, \cdot)$ gilt $\mathrm{ord}(a \cdot b) = \mathrm{ord}(b \cdot a)$.

39. Welchen bekannten Graphen $\Gamma = (V, E)$ erhält man mit
 $V := \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,\dots,5\}, i \neq j\}$, $E := \{\{\{i,j\},\{k,l\}\} \subseteq V \mid \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset\}$?

40. Zeige: jede Permutation $g \in S_5$ liefert einen Automorphismus dieses Graphen Γ mit $\bar{g}: V \to V$, $\{i,j\} \mapsto \{g(i), g(j)\}$.

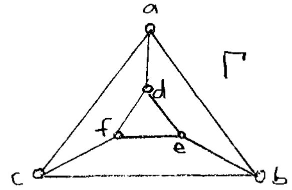
41. Sei G die Automorphismengruppe des Petersengraphen. Bestimme die Bahnen 0^G, 1^{G_0}, $2^{G_{01}}$, $3^{G_{012}}$, sowie den Stabilisator G_{0123}.



42. Wieviele Elemente hat die Automorphismengruppe des Petersengraphen. Vergleiche mit Aufgabe 40.

H43. Bestimme alle Elemente der von der Permutation $(1\ 2\ 3\ 4)$ erzeugten Untergruppe $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$ von S_4, und finde alle Elemente der Linksnebenklasse gH für $g = (1\ 4)$.

H44. Bestimme die Automorphismengruppe $G(\Gamma)$ des Graphen Γ.



*H45. Haremsatz. Sei $G(S,T)$ ein endlicher bipartiter Graph. Jeder Ecke $s \in S$ sei eine natürliche Zahl p_s zugeordnet. Es soll eine Teilmenge K von Kanten gefunden werden, so daß jedes $s \in S$ mit genau p_s dieser Kanten und jedes $t \in T$ mit höchstens einer dieser Kanten inzidiert. Unter welchen Bedingungen existiert eine solche Menge K?
Hinweis. Man orientiere sich am Heiratssatz.

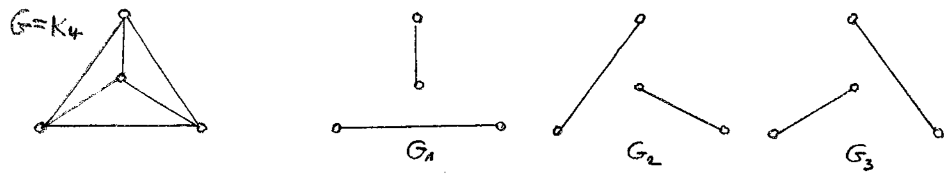
Auf der Rückseite Miniprojekt Nr. 1

MINIPROJEKTE

Durch die erfolgreiche, eigenständige und eventuell auch interessante Bearbeitung der im Laufe des Semesters angebotenen drei Miniprojekte kann ein Übungsschein erworben werden, der im Diplomstudiengang Mathematik gleichwertig zu einem Mittelseminarschein ist.
Die Ausarbeitungen sollen spätestens zwei Wochen nach der Aufgabenstellung abgegeben werden, und gibt es wiederum eine Woche später vom Dozenten bewertet zurück.
Die weiteren Miniprojekte werden voraussichtlich in den Semesterwochen sechs (am 19.11.) und neun (am 10.12.) gestellt.

MINIPROJEKT NR. 1 (Thema: 1-Faktorisierungen). Es soll eine Ausarbeitung geschrieben werden, in der zumindest die auf das Beispiel folgenden Fragen beantwortet werden.

Definition. Ein 1-Faktor eines Graphen ist ein Teilgraph, der alle Ecken des Graphen enthält, und dessen Ecken alle Grad 1 haben. Ist G ein Graph mit 1-Faktoren $G_1, \ldots, G_k$, so daß jede Kante von G in genau einem der 1-Faktoren enthalten ist, dann nennt man die Gesamtheit dieser 1-Faktoren eine 1-Faktorisierung von G.
Als Beispiel eine 1-Faktorisierung von K_4:



(1) Welche der vollständigen Graphen K_n und welche der vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,n}$ besitzen eine 1-Faktorisierung?

(2) Verwende eines der Ergebnisse aus (1), um „Bundesliga-Spielpläne" zu erstellen. Bedingungen:
(i) insgesamt n Mannschaften,
(ii) an jedem Spieltag spielt jede Mannschaft genau ein Spiel (falls n ungerade ist, darf eine Mannschaft aussetzen),
(iii) nach Durchführung aller Spieltage hat jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere gespielt.

Hinweis. Zur Bearbeitung des Themas kann z.B. das Buch „Graphentheorie" von F. Harary verwendet werden. Das Buch steht im Lesesaal der Fachbereichsbibliothek im Semesterapparat zur Vorlesung zweimal zur Verfügung!