Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

10.12.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 8

Präsenzübung

Ü 22 Es sei $A = A^H$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ und S beliebig, aber vom Rang p in $\mathbb{C}^{n\times p}$ mit $p < n$. Zeigen Sie: ist der Bildraum von AS im Bildraum von S enthalten, dann wird besitzt der Bildraum von S eine Basis aus Eigenvektoren von A.

Ü 23 Im Folgenden bezeichne span(A) den Bildraum der Matrix A. Es sei wieder $A = A^H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $Y_k \in \mathbb{C}^{n\times p}$ mit $p < n$. Wir betrachten die `RR`-Iteration

1. $$\hat{Y}_k = AY_{k-1}$$
2. $$\hat{Y}_k = Q_k R_k, Q_k^H Q_k = I_p$$
3. $$Q_k^H A Q_k = V_k \Sigma_k V_k^H \quad \text{Spektralzerlegung}$$
4. $$Y_k = Q_k V_k$$

Zeigen Sie
$$\text{span}(Y_k) = \text{span}(A^k Y_0)$$

Ü 24 Zeigen Sie: Ist $A = A^H$ und
$$A = U\Lambda U^H \text{ Spektralzerlegung von } A$$
sowie $\{Y_k\}$ die mit orthonormiertem Y_0 erzeugte Matrizenfolge aus `RR`, sowie
$$Z_0 = U^H Y_0$$
dann ist $\{Z_k\} = \{U^H Y_k\}$ die von `RR` erzeugte Matrizenfolge für Λ. Welche Konsequenz ziehen Sie daraus für eine theoretische Konvergenzuntersuchung für `RR`?.

Hausübung

H 22 Zeigen Sie: Ist

$$I + E^H E = Z^H Z$$

mit $I,\ Z\ \in\ \mathbb{C}^{p\times p}$ und $E\ \in\ \mathbb{C}^{m\times p}$ dann kann gilt

$$Z = (I + \mathcal{O}(||E||))W$$

mit unitärem W.
Hinweis: Jede Matrix kann nach `QR` zerlegt werden. Betrachten Sie die Cholesky-Zerlegung von $I + E^H E$ und die `QR`-Zerlegung von Z.

H 23 Seien $A = A^H$ und

$$|\lambda_1|\ \geq\ \ldots\ |\lambda_p|\ >\ |\lambda_{p+1}|\ \geq\ \ldots\ \geq\ |\lambda_n|$$

die Eigenwerte von A mit den orthonormierten Eigenvektoren u_i. Ferner sei Y_0 in $\mathbb{C}^{n\times p}$ mit

$$Y_0^H Y_0\ =\ I_p\ \text{ und }\ (u_1,\ldots,u_p)^H Y_0 \text{ invertierbar .}$$

Zeigen Sie : die von `RR` erzeugte Folge Y_k erfüllt

$$\lim_{k\ \to\ \infty} ||AY_k - Y_k(Y_k^H AY_k)||\ =\ 0$$

Sind die p betragsgrössten Eigenwerte auch alle paarweise verschieden, dann konvergiert sogar Spalte i von Y_k gegen u_i bis auf einen Faktor vom Betrage eins. Versuchen Sie, die Konvergenzrate möglichst gut abzuschätzen.
Hinweis: Benutzen Sie die Resultate der Gruppenübung. O.B.d.A. können Sie also $A\ =\ \Lambda$ diagonal wählen. Damit vereinfacht sich die Formulierung der Voraussetzung an Y_0. Nun stellen Sie Y_k als Basis des Bildsraums von $A^k Y_0$ geeignet dar und berücksichtigen, daß

$$Y_k^H Y_k\ =\ I_p$$

Sie werden dann auf eine Anwendung der ersten Hausübung geführt.

H 24 Programmieren Sie unter Zuhilfenahme der Funktion `gramschmidt` im directory der Uebungslösungen und der `MATLAB`–Funktion `eig` das Verfahren `RR` und testen Sie es an einigen Matrizen aus `elmat` und `gallery` (z.B. `rosser, hilb, pascal, hankel(c,r), gallery('ris',n)` etc) Lassen Sie sich die exakten Eigenwerte dieser Matrizen erst anzeigen, bevor Sie p wählen. Bei `rosser` ist $p = 2$ sehr ambitioniert, $p = 6$ sollte dagegen problemlos sein. Ihre Funktion könnte z.B. so aussehen:

```
%function [Y,Lambda,flag,history,historyend]=RR(A,Y0,m,maxiter,rfac,epsilon)
% [Y,Lambda,history,historylength]=RR(A,Y0,m,maxiter,rfac,epsilon)
% computes the p leading eigenvalues Lambda(1),..,Lambda(p)
% with corresponding eigenvectors Y(:,i) of the symmetric
% n times n matrix A using the Rayleigh-Ritz-method
% aiming for obtaining
%
% norm(A*Y-Y*diag(Lambda),inf) ¡= epsilon*norm(A).
```

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 8, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 22 Es sei $A = A^H$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ und S beliebig, aber vom Rang p in $\mathbb{C}^{n\times p}$ mit $p < n$. Zeigen Sie: ist der Bildraum von AS im Bildraum von S enthalten, dann wird besitzt der Bildraum von S eine Basis aus Eigenvektoren von A.

Die Voraussetzung lautet matriziell geschrieben

$$AS \;=\; SH \quad \mathit{mit} \quad H \;\in\; \mathbb{C}^{p\times p}$$

Sei

$$S \;=\; QR$$

eine `QR`*–Zerlegung von S mit orthonormiertem Q in $\mathbb{C}^{n\times p}$. Dann gilt*

$$Q^H AQ \;=\; RHR^{-1} \;=\; V\Sigma V^H$$

mit der Spektralzerlegung von $Q^H AQ$. Also ist

$$AQ \;=\; QRHR^{-1} \;=\; QV\Sigma V^H \;\Leftrightarrow\; AQV \;=\; QV\Sigma$$

d.h. die $i-$te Spalte von QV ist Eigenvektor zum Eigenwert Σ_{ii} von A. Der Bildraum von S wird auch von den Spalten von Q aufgespannt, also auch von den Spalten von QV.

Ü 23 Im Folgenden bezeichne span(A) den Bildraum der Matrix A. Es sei wieder $A = A^H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $Y_k \in \mathbb{C}^{n\times p}$ mit $p < n$. Wir betrachten die `RR`-Iteration

1. $$\hat{Y}_k \;=\; AY_{k-1}$$
2. $$\hat{Y}_k \;=\; Q_k R_k, Q_k^H Q_k \;=\; I_p$$
3. $$Q_k^H AQ_k \;=\; V_k \Sigma_k V_k^H \quad \text{Spektralzerlegung}$$
4. $$Y_k \;= Q_k V_k$$

Zeigen Sie

$$\mathrm{span}(Y_k) \;=\; \mathrm{span}(A^k Y_0)$$

Offensichtlich ist

$$span(Y_k) \;=\; span(Q_k) \;=\; span(\hat{Y}_k) \;=\; span(AY_{k-1})$$

und induktive Anwendung dieser Beziehung liefert die Behauptung.

Ü 24 Zeigen Sie: Ist $A = A^H$ und

$$A \;=\; U\Lambda U^H \text{ Spektralzerlegung von } A$$

sowie $\{Y_k\}$ die mit orthonormiertem Y_0 erzeugte Matrizenfolge aus `RR`, sowie

$$Z_0 \;=\; U^H Y_0$$

dann ist $\{Z_k\} \;=\; \{U^H Y_k\}$ die von `RR` erzeugte Matrizenfolge für Λ. Welche Konsequenz ziehen Sie daraus für eine theoretische Konvergenzuntersuchung für `RR`?.

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_k &= U\Lambda U^H Y_{k-1} &\Leftrightarrow\quad & U^H\hat{Y}_k \;=\; \Lambda U^H Y_{k-1} \;=\; \Lambda Z_{k-1}\\
\hat{Y}_k &= Q_k R_k &\Leftrightarrow\quad & U^H\hat{Y}_k \;=\; U^H Q_k R_k \;=\; \tilde{Q}_k R_k\\
Q_k^H A Q_k &= V_k \Sigma_k V_k^H &\Leftrightarrow\quad & Q_k^H U\Lambda U^H Q_k = V_k\Sigma_k V_k^H \;=\; \tilde{Q}^H \Lambda \tilde{Q}_k\\
Y_k &= Q_k V_k &\Leftrightarrow\quad & Z_k \;=\; U^H Y_k \;=\; \tilde{Q}_k V_k
\end{aligned}$$

Hausübung

H 22 Zeigen Sie: Ist

$$I + E^H E = Z^H Z$$

mit $I,\ Z\ \in\ \mathbb{C}^{p\times p}$ und $E\ \in\ \mathbb{C}^{m\times p}$ dann kann gilt

$$Z = (I + \mathcal{O}(||E||))W$$

mit unitärem W.
Hinweis: Jede Matrix kann nach `QR` zerlegt werden. Betrachten Sie die Cholesky-Zerlegung von $I + E^H E$ und die `QR`-Zerlegung von Z.

Es ist klar, daß $I + E^H E$ hermitisch und positiv definit ist, also eine Cholesky-Zerlegung besitzt. Betrachtet man Real- und Imaginärteil der Komponenten der Cholesky-Zerlegung als Funktionen der Elemente von Realteil und Imaginärteil von E, dann ist offensichtlich, daß es sich um (reell!) differenzierbare Funktionen handelt, da nur rationale Ausdrücke mit nichtverschwindendem (positiv reellen) Nenner $l_{i,i}$ vorkommen und auch die $l_{i,i}$ sind als positiv reelle Wurzeln einer streng positiven Summe reell differenzierbar. Für $E = O$ ist $L = I$ und aus der Taylorformel folgt

$$I + E^H E \;=\; LL^H \quad \textit{mit} \quad L = I + \mathcal{O}(||E||)$$

Sei nun

$$Z \;=\; QR$$

eine `QR`-Zerlegung von Z. Dann ist

$$Z^H Z \;=\; R^H R = LL^H$$

und Auflösung nach R ergibt sukzessiv

$$R \;=\; \Theta L^H \quad \textit{mit} \quad |\Theta| \;=\; I\ .$$

Damit ist alles bewiesen.

H 23 Seien $A = A^H$ und

$$|\lambda_1| \;\geq\; \ldots\; |\lambda_p| \;>\; |\lambda_{p+1}| \;\geq\; \ldots \;\geq\; |\lambda_n|$$

die Eigenwerte von A mit den orthonormierten Eigenvektoren u_i. Ferner sei Y_0 in $\mathbb{C}^{n\times p}$ mit

$$Y_0^H Y_0 \;=\; I_p \;\text{ und }\; (u_1,\ldots,u_p)^H Y_0 \text{ invertierbar}\ .$$

Zeigen Sie : die von `RR` erzeugte Folge Y_k erfüllt

$$\lim_{k\;\to\;\infty} ||AY_k - Y_k(Y_k^H A Y_k)|| \;=\; 0$$

Sind die p betragsgrössten Eigenwerte auch alle paarweise verschieden, dann konvergiert sogar Spalte i von Y_k gegen u_i bis auf einen Faktor vom Betrage eins. Versuchen Sie, die Konvergenzrate möglichst gut abzuschätzen.
Hinweis: Benutzen Sie die Resultate der Gruppenübung. O.B.d.A. können Sie also $A = \Lambda$ diagonal wählen. Damit vereinfacht sich die Formulierung der Voraussetzung an Y_0. Nun stellen Sie Y_k als Basis des Bildsraums von $A^k Y_0$ geeignet dar und berücksichtigen, daß

$$Y_k^H Y_k \ = \ I_p$$

Sie werden dann auf eine Anwendung der ersten Hausübung geführt.

Wegen Ü24 nehmen wir

$$A \ = \ \Lambda \ = \ diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad und \quad U \ = \ I$$

an. Nach Ü23 kann man Y_k schreiben als

$$Y_k \ = \ \Lambda^k Y_0 W_k$$

mit einer Matrix $W_k \ \in \ \mathbb{R}^{p \times p}$. Wegen der Voraussetzung an Y_0 ist

$$Y_0 \ = \ \begin{pmatrix} Y_{01} \\ Y_{02} \end{pmatrix}$$

mit einer invertierbaren Matrix $Y_{01} \ \in \ \mathbb{R}^{p \times p}$. Wir nehmen weiterhin auch auch, daß der Eigenwertproblemlöser für $Q_k^T A Q_k$ die Eigenwerte absteigend sortiert liefert. Mit

$$\tilde{Y}_{02} \ = \ Y_{02} Y_{01}^{-1}$$

wird

$$Y_k \ = \ \begin{pmatrix} \Lambda_1^k \\ \Lambda_2 \tilde{Y}_{02} \end{pmatrix} Y_{01} W_k \ .$$

Konstruktiv gilt

$$\begin{aligned} I_p &= Y_k^H Y_k \\ &= W_k^H Y_{01}^H \Lambda_1^{2k} Y_{01} W_k + W_k^H Y_{02}^H \Lambda_2^{2k} Y_{02} W_k \\ &= W_k^H Y_{01}^H \Lambda_1^k (I_p + \Lambda_1^{-k} \tilde{Y}_{02}^H \Lambda_2^k \cdot \Lambda_2^k \tilde{Y}_{02} \Lambda_1^{-k}) \Lambda_1^k Y_{01} W_k \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} I_p + E_k^H E_k &= \Lambda_1^{-k} Y_{01}^{-H} W_k^{-H} W_k^{-1} Y_{01}^{-1} \Lambda_1^{-k} \\ &= Z_k^H Z_k \end{aligned}$$

mit

$$E_k \ = \ \Lambda_2^k \tilde{Y}_{02} \Lambda_1^{-k} \ , \ Z_k \ = \ W_k^{-1} Y_{01}^{-1} \Lambda_1^{-k} \ .$$

Wegen

$$(E_k)_{i,j} \ = \left(\frac{\lambda_{i+p}}{\lambda_j}\right)^k (\tilde{Y}_{02})_{i,j} \ , \quad i = 1, \ldots, n-p, \ j = 1, \ldots, p$$

und der Voraussetzung an die λ_k *gilt*

$$E_k \ \to \ O \text{ für } k \ \to \ \infty$$

und daher

$$Z_k \ \to \ I_p \ \Rightarrow \ Z_k^{-1} \to \ I_p \ .$$

Für Y_k *erhalten wir so die Darstellung*

$$Y_k \ = \ \begin{pmatrix} I_p \\ E_k \end{pmatrix} Z_k^{-1}$$

Damit ergibt sich für $Y_k^H A Y_k$ *die Darstellung*

$$\begin{aligned} Y_k^H A Y_k &= Z_k^{-H}(\Lambda_1 + E_k^H \Lambda_2 E_k) Z_k^{-1} \\ &= Z_k^{-H}\Lambda_1 Z_k^{-1} + E_k^H \Lambda_2 E_k + \mathcal{O}(||E_k||^3) \\ &= \Sigma_k \\ &\to \Lambda_1 \end{aligned}$$

Wir wissen auch nach Konstruktion, daß dies eine Diagonalmatrix ist. Schliesslich wird

$$R_k \ = \ AY_k - Y_k\Sigma_k \ = \ \begin{pmatrix} \Lambda_1 Z_k^{-1} - Z_k^{-1}\Sigma_k \\ \Lambda_2 E_k Z_k^{-1} - E_k Z_k^{-1}\Sigma_k \end{pmatrix} \ \to \ O$$

was zu beweisen war. Sind die ersten p λ_i *alle betragsverschieden, dann sind auch die Einträge von* Σ_k *für genügend grosses* k *betragsverschieden und damit muss jede Spalte von* Y_k *in der Richtung gegen den entsprechenden in der Richtung eindeutig bestimmten Eigenvektor von* A *konvergieren. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist nach dieser ersten Analyse wie*

$$(\lambda_p/\lambda_{p+1})^k \ \to \ 0$$

Um zu genaueren Aussagen zu gelangen, muss man die Matrix Z_k *näher untersuchen.* Z_k *kann immer dargestellt werden als* `QR`*-Zerlegung*

$$Z_k \ = \ \Omega_k L_k^H \quad \text{O.B.d.A. } (L_k)_{i,i} \ > \ 0 \ , \ \Omega_k^H \Omega_k \ = \ I_p$$

und dann ist

$$Z_k^H Z_k \ = \ L_k L_k^H \quad \text{Cholesky-Zerlegung}$$

Für die Matrix $E_k^H E_k$ *gilt die Darstellung*

$$(E_k^H E_k)_{j,s} \ = \ \sum_{i=1}^{n-p} (\tilde{Y}_{02})_{i,j} (\tilde{Y}_{02})_{i,s} \lambda_{i+p}^{2k} \lambda_s^{-k} \lambda_j^{-k}$$

d.h.

$$(E_k^H E_k)_{j,s} \;=\; \mathcal{O}(\frac{\lambda_{p+1}^{2k}}{\lambda_j^k \lambda_s^k}) \ .$$

D.h. die i-te Spalte von L_k kann man abschätzen in der Form

$$L_k e_i = e_i + \mathcal{O}(\frac{\lambda_{p+1}^k}{\lambda_i^k})$$

Es bleibt die Rolle von Ω_k zu klären. Wegen

$$Y_k^H A Y_k \;=\; \Sigma_k$$

wird

$$Z_k^{-H} \Lambda_1 Z_k^{-1} + Z_k^{-H} E_k^H \Lambda_2 E_k Z_k^{-1} \;=\; \Sigma_k$$

also unter Verwendung der bereits erzielten Darstellung von L_k und Ausnutzung von

$$(I+F)^{-1} \;=\; I - F + \mathcal{O}(||F||^2)$$

$$\Omega_k (I + \mathcal{O}(||E_k||)\Lambda_1 (I + \mathcal{O}(||E_k||)\Omega_k^H \;=\; \Sigma_k + \mathcal{O}(||E_k||^2)$$

und hieraus

$$\Omega_k \Lambda_1 \Omega_k^H \;=\; \Lambda_1 + \mathcal{O}(||E_k||)$$

Sind also alle $\lambda_i, \ i = 1, \ldots, p$ paarweise verschieden, dann folgt

$$\Omega_k \;=\; I + \mathcal{O}(||E_k||)$$

Ist ein λ_i ein mehrfacher Eigenwert, dann kann an der entsprechenden Stelle in Ω ein vollbesetzter Diagonalblock der entsprechenden Grösse stehen. Dann haben aber auch die zugehörigen Spalten in E_k alle die gleiche Fehlerordnung. In einem invarianten Unterraum, der nur zu einem einzelnen mehrfachen Eigenwert gehört, ist jedes Element ein Eigenvektor.

Dies zusammen mit der Darstellung von L_k eingesetzt in die Formel für Y_k liefert die Konvergenzaussage von Satz 1.5.3.

H 24 Programmieren Sie unter Zuhilfenahme der Funktion `gramschmidt` im directory der Uebungslösungen und der `MATLAB`–Funktion `eig` das Verfahren `RR` und testen Sie es an einigen Matrizen aus `elmat` und `gallery` (z.B. `rosser, hilb, pascal, hankel(c,r), gallery('ris',n)` etc) Lassen Sie sich die exakten Eigenwerte dieser Matrizen erst anzeigen, bevor Sie p wählen. Bei `rosser` ist $p = 2$ sehr ambitioniert, $p = 6$ sollte dagegen problemlos sein. Ihre Funktion könnte z.B. so aussehen:

```
%function [Y,Lambda,flag,history,historyend]=RR(A,Y0,m,maxiter,rfac,epsilon)
% [Y,Lambda,history,historylength]=RR(A,Y0,m,maxiter,rfac,epsilon)
% computes the p leading eigenvalues Lambda(1),..,Lambda(p)
% with corresponding eigenvectors Y(:,i) of the symmetric
```

% n times n matrix A using the Rayleigh-Ritz-method
% aiming for obtaining
%
% norm(A*Y-Y*diag(Lambda),inf) ¡= epsilon*norm(A).

```
function [Y,Lambda,flag,history,historyend]=RR(A,Y0,m,maxiter,rfac,epsilon)
% [Y,Lambda,history,historylength]=RR(A,Y0,m,maxiter,rfac,epsilon)
% computes the p leading eigenvalues Lambda(1),..,Lambda(p)
% with corresponding eignevectors Y(:,i) of the symmetric
% n times n matrix A using the Rayleight-Ritz-method
% aiming for obtaining
%
% norm(A*Y-Y*diag(Lambda),inf) <= epsilon*norm(A).
%
% (of course: epsilon >> eps !!!)
% Y0 is the intial eigenvectormatrix  guess
% Y0 must not be orthonormalized
% but must have full rank
% maxiter steps are performed at most.
% every m-th step the residual infnorm is computed
% and it is required that it decreases by the factor rfac
% at least. if one of these requirements is not reached
% then flag is set to zero and the iteration is terminated.
% since the error reduction also depends on the proper
% choice of p the user may retry with a larger or
% smaller value of p
% history(1:historylength,1:p+1) contains the
% eigenvalues and the residual norm (in position p+1)
% for those test steps
siz=size(A);
if siz(1) ~= siz(2)
    error('RR: matrix must be square');
end
if norm(A-A',inf) ~= 0
    error('RR: matrix must be hermitian');
end
siz2=size(Y0);
if siz2(1) ~= siz(1)
    error('RR: matrix Y0 must have row length of A');
end
p=siz2(2);
n=siz(1);
```

```
if p>n
    error('RR: more than dim(A) eigenvalues requested');
end
iter=0; %counts the steps
cnt=0; %reset every m-th step
[U0,R0]=gramschmidt(Y0,0);
if rank(R0) < p
    error('RR: Y0 has not full column rank');
end
if rfac <=0
    rfac=inf;
end
history=zeros(maxiter,p+1);
historyend=1;
H0=U0'*A*U0;
[V0,D0]=eig(H0);
% Lambda is a column
Y=U0*V0;
U0=Y;
Lambda=diag(D0);
res1=norm(A*Y-Y*D0,inf);
history(1,:)=[diag(D0)',res1];
norma=sum(abs(diag(A)));  %somewhat crude but cheap
while  iter <= maxiter,
    iter=iter+1;
    cnt=cnt+1;
    Y1=A*U0;
    [U0,R0]=gramschmidt(Y1,0);
    H0=U0'*A*U0;
    [V0,D0]=eig(H0);
    U0=U0*V0;
    if cnt==m
        res0=norm(A*U0-U0*D0,inf);
        historyend=historyend+1;
        history(historyend,:)=[diag(D0)',res0];
        cnt=0;
        if res0> res1*rfac
            flag=0;
            Lambda=diag(D0);
            Y=U0;
            return
        end
```

```
        if res0 <= epsilon*norma
           flag=1;
           Lambda=diag(D0);
           Y=U0;
           return;
        end
    end

end
flag=0;
Lambda=diag(D0);
Y=U0;

rosser, all eigenvalues from eig

ans =

   1.0e+03 *

  -1.020049018429997
   0.000000000000000
   0.000098048640722
   1.000000000000000
   1.000000000000001
   1.019901951359279
   1.020000000000000
   1.020049018429997

p   =6
flag=1
Iterationsfolge
step residualnorm  eigenvalues
0001 5.37380e+02 -8.5096035e+02  9.9146656e+00  1.6027089e+02  1.0000299e+03  1.020
0002 1.15498e+00 -1.0200489e+03  1.0199018e+03  1.0199997e+03  1.0200490e+03  9.999
0003 1.12077e-04 -1.0200490e+03  1.0199020e+03  1.0200000e+03  1.0200490e+03  1.000
====================================================================
hankel([1;-4;5;6],[6,3,-9,1]), all eigenvalues from eig

ans =

 -14.630747266227667
   5.742236862698788
   6.565015926163563
```

```
  12.323494477365314

p   =2
flag=1
Iterationsfolge
step residualnorm  eigenvalues
0001 7.95772e+00 3.8328255e+00  1.0461176e+01
0002 1.00738e+01 -1.8468309e+00  1.1219446e+01
0003 8.31498e+00 -9.7582554e+00  1.1916667e+01
0004 3.70224e+00 -1.3530350e+01  1.2206282e+01
0005 1.85922e+00 -1.4422683e+01  1.2291800e+01
0006 7.93105e-01 -1.4592441e+01  1.2314970e+01
0007 3.76190e-01 -1.4623643e+01  1.2321185e+01
0008 1.72637e-01 -1.4629413e+01  1.2322864e+01
0009 8.13648e-02 -1.4630493e+01  1.2323321e+01
0010 3.83680e-02 -1.4630698e+01  1.2323446e+01
0011 1.82947e-02 -1.4630738e+01  1.2323481e+01
0012 8.77880e-03 -1.4630745e+01  1.2323491e+01
0013 4.24797e-03 -1.4630747e+01  1.2323493e+01
0014 2.07095e-03 -1.4630747e+01  1.2323494e+01
0015 1.01751e-03 -1.4630747e+01  1.2323494e+01
0016 5.03669e-04 -1.4630747e+01  1.2323494e+01
0017 2.51141e-04 -1.4630747e+01  1.2323494e+01
0018 1.26096e-04 -1.4630747e+01  1.2323494e+01
0019 6.37290e-05 -1.4630747e+01  1.2323494e+01
====================================================================
ris(6),  all eigenvalues from eig

ans =

  -1.570796270928806
  -1.570474190411367
  -1.443757268167047
   0.708046076985420
   1.562180304994812
   1.570789803515445

p   =3
flag=0
Iterationsfolge
step residualnorm  eigenvalues
0001 1.91911e+00 -8.5071399e-01  7.6325966e-01  3.4827224e-01
0002 1.73755e+00 -8.4669627e-01  1.9035069e-01  8.7060681e-01
```

```
0003 1.68774e+00 -8.5490230e-01 -2.7902056e-01  9.8842678e-01
0004 1.85741e+00 -1.0467875e+00 -7.3386690e-01  1.0527081e+00
0005 1.49406e+00 -1.3676525e+00 -7.6577417e-01  1.0809370e+00
0006 1.58907e+00 -1.4765924e+00 -7.5492502e-01  1.1003517e+00
0007 1.44760e+00 -1.5068853e+00 -7.3823314e-01  1.1195489e+00
0008 1.53107e+00 -1.5176214e+00 -7.2009810e-01  1.1402364e+00
0009 1.45806e+00 -1.5237967e+00 -7.0177460e-01  1.1625688e+00
0010 1.51263e+00 -1.5287924e+00 -6.8379821e-01  1.1863456e+00
0011 1.45174e+00 -1.5333243e+00 -6.6649506e-01  1.2112481e+00
0012 1.49550e+00 -1.5375237e+00 -6.5010781e-01  1.2368971e+00
0013 1.43882e+00 -1.5414026e+00 -6.3482256e-01  1.2628812e+00
0014 1.47373e+00 -1.5449554e+00 -6.2077264e-01  1.2887829e+00
0015 1.42319e+00 -1.5481802e+00 -6.0803971e-01  1.3142029e+00
0016 1.45295e+00 -1.5510822e+00 -5.9665723e-01  1.3387824e+00
0017 1.40659e+00 -1.5536734e+00 -5.8661654e-01  1.3622190e+00
0018 1.42732e+00 -1.5559707e+00 -5.7787481e-01  1.3842771e+00
0019 1.39008e+00 -1.5579945e+00 -5.7036345e-01  1.4047905e+00
0020 1.39899e+00 -1.5597673e+00 -5.6399641e-01  1.4236604e+00
0021 1.37437e+00 -1.5613127e+00 -5.5867734e-01  1.4408485e+00
0022 1.37000e+00 -1.5626539e+00 -5.5430569e-01  1.4563673e+00
0023 1.35992e+00 -1.5638135e+00 -5.5078126e-01  1.4702700e+00
0024 1.34187e+00 -1.5648127e+00 -5.4800758e-01  1.4826392e+00
0025 1.34693e+00 -1.5656714e+00 -5.4589414e-01  1.4935779e+00
0026 1.31555e+00 -1.5664074e+00 -5.4435773e-01  1.5032006e+00
0027 1.33544e+00 -1.5670370e+00  1.5116273e+00 -5.4332304e-01
0028 1.29152e+00 -1.5675745e+00  1.5189775e+00 -5.4272281e-01
0029 1.32616e+00 -1.5680328e+00  1.5253672e+00 -5.4249756e-01
0030 1.26993e+00 -1.5684229e+00  1.5309059e+00 -5.4259519e-01
0031 1.31808e+00 -1.5687546e+00  1.5356950e+00 -5.4297033e-01
0032 1.25070e+00 -1.5690365e+00  1.5398274e+00 -5.4358376e-01
0033 1.31082e+00 -1.5692758e+00  1.5433870e+00 -5.4440169e-01
0034 1.23366e+00 -1.5694787e+00  1.5464486e+00 -5.4539515e-01
0035 1.30435e+00 -1.5696508e+00  1.5490788e+00 -5.4653940e-01
0036 1.21855e+00 -1.5697966e+00  1.5513361e+00 -5.4781334e-01
0037 1.29859e+00 -1.5699201e+00  1.5532719e+00 -5.4919905e-01
0038 1.20514e+00 -1.5700247e+00  1.5549310e+00 -5.5068132e-01
0039 1.29346e+00 -1.5701132e+00  1.5563523e+00 -5.5224726e-01
0040 1.19319e+00 -1.5701881e+00  1.5575697e+00 -5.5388599e-01
0041 1.28889e+00 -1.5702515e+00  1.5586122e+00 -5.5558830e-01
0042 1.18248e+00 -1.5703051e+00  1.5595051e+00 -5.5734644e-01
0043 1.28481e+00 -1.5703505e+00  1.5602698e+00 -5.5915387e-01
0044 1.17281e+00 -1.5703888e+00  1.5609251e+00 -5.6100506e-01
0045 1.28113e+00 -1.5704212e+00  1.5614868e+00 -5.6289539e-01
```

```
0046 1.16403e+00 -1.5704487e+00  1.5619686e+00 -5.6482095e-01
0047 1.27779e+00 -1.5704719e+00  1.5623823e+00 -5.6677847e-01
0048 1.15599e+00 -1.5704915e+00  1.5627379e+00 -5.6876518e-01
0049 1.27474e+00 -1.5705080e+00  1.5630438e+00 -5.7077877e-01
0050 1.14856e+00 -1.5705221e+00  1.5633074e+00 -5.7281729e-01
0051 1.27194e+00 -1.5705339e+00  1.5635350e+00 -5.7487911e-01
0052 1.14165e+00 -1.5705439e+00  1.5637319e+00 -5.7696286e-01
0053 1.26933e+00 -1.5705524e+00  1.5639026e+00 -5.7906738e-01
0054 1.13517e+00 -1.5705596e+00  1.5640510e+00 -5.8119172e-01
0055 1.26688e+00 -1.5705656e+00  1.5641805e+00 -5.8333505e-01
0056 1.12905e+00 -1.5705708e+00  1.5642938e+00 -5.8549669e-01
0057 1.26456e+00 -1.5705751e+00  1.5643933e+00 -5.8767608e-01
0058 1.12321e+00 -1.5705788e+00  1.5644812e+00 -5.8987273e-01
0059 1.26234e+00 -1.5705819e+00  1.5645591e+00 -5.9208624e-01
0060 1.11762e+00 -1.5705845e+00  1.5646285e+00 -5.9431625e-01
0061 1.26020e+00 -1.5705867e+00  1.5646907e+00 -5.9656249e-01
0062 1.11222e+00 -1.5705886e+00  1.5647469e+00 -5.9882471e-01
0063 1.25818e+00 -1.5705902e+00  1.5647978e+00 -6.0110271e-01
0064 1.10697e+00 -1.5705916e+00  1.5648443e+00 -6.0339630e-01
0065 1.25635e+00 -1.5705927e+00  1.5648870e+00 -6.0570533e-01
0066 1.10185e+00 -1.5705937e+00  1.5649266e+00 -6.0802968e-01
0067 1.25565e+00 -1.5705945e+00  1.5649634e+00 -6.1036922e-01
0068 1.09682e+00 -1.5705952e+00  1.5649980e+00 -6.1272387e-01
0069 1.25476e+00 -1.5705958e+00  1.5650307e+00 -6.1509354e-01
0070 1.09186e+00 -1.5705964e+00  1.5650617e+00 -6.1747814e-01
0071 1.25371e+00 -1.5705968e+00  1.5650913e+00 -6.1987761e-01
0072 1.08698e+00 -1.5705972e+00  1.5651198e+00 -6.2229188e-01
0073 1.25250e+00 -1.5705975e+00  1.5651473e+00 -6.2472089e-01
0074 1.08217e+00 -1.5705978e+00  1.5651739e+00 -6.2716458e-01
0075 1.25116e+00 -1.5705980e+00  1.5651999e+00 -6.2962291e-01
0076 1.07801e+00 -1.5705982e+00  1.5652253e+00 -6.3209582e-01
0077 1.24969e+00 -1.5705984e+00  1.5652501e+00 -6.3458325e-01
0078 1.07422e+00 -1.5705986e+00  1.5652746e+00 -6.3708517e-01
0079 1.24809e+00 -1.5705987e+00  1.5652988e+00 -6.3960152e-01
0080 1.07026e+00 -1.5705988e+00  1.5653227e+00 -6.4213224e-01
0081 1.24638e+00 -1.5705989e+00  1.5653463e+00 -6.4467730e-01
0082 1.06616e+00 -1.5705990e+00  1.5653698e+00 -6.4723663e-01
0083 1.24457e+00 -1.5705991e+00  1.5653931e+00 -6.4981019e-01
0084 1.06191e+00 -1.5705992e+00  1.5654163e+00 -6.5239793e-01
0085 1.24265e+00 -1.5705992e+00  1.5654394e+00 -6.5499978e-01
0086 1.05755e+00 -1.5705993e+00  1.5654624e+00 -6.5761569e-01
0087 1.24064e+00 -1.5705994e+00  1.5654854e+00 -6.6024560e-01
0088 1.05307e+00 -1.5705994e+00  1.5655084e+00 -6.6288946e-01
```

```
0089 1.23852e+00 -1.5705995e+00  1.5655313e+00 -6.6554720e-01
0090 1.04847e+00 -1.5705995e+00  1.5655542e+00 -6.6821876e-01
0091 1.23632e+00 -1.5705996e+00  1.5655771e+00 -6.7090408e-01
0092 1.04378e+00 -1.5705996e+00  1.5656000e+00 -6.7360307e-01
0093 1.23402e+00 -1.5705997e+00  1.5656229e+00 -6.7631569e-01
0094 1.03899e+00 -1.5705997e+00  1.5656458e+00 -6.7904184e-01
0095 1.23164e+00 -1.5705997e+00  1.5656688e+00 -6.8178147e-01
0096 1.03410e+00 -1.5705998e+00  1.5656918e+00 -6.8453449e-01
0097 1.22917e+00 -1.5705998e+00  1.5657148e+00 -6.8730083e-01
0098 1.02913e+00 -1.5705998e+00  1.5657378e+00 -6.9008040e-01
0099 1.22661e+00 -1.5705999e+00  1.5657608e+00 -6.9287312e-01
0100 1.02407e+00 -1.5705999e+00  1.5657839e+00 -6.9567891e-01
0101 1.22396e+00 -1.5705999e+00  1.5658070e+00 -6.9849767e-01
0102 1.01893e+00 -1.5706000e+00  1.5658302e+00 -7.0132933e-01
==================================================================
pascal(10), all eigenvalues from eig

ans =

   1.0e+04 *

   0.000000001551328
   0.000000061420880
   0.000001048573568
   0.000009896498186
   0.000052803793086
   0.000189380334548
   0.001010458428040
   0.009536765280652
   0.162811082417966
   6.446088501701744

p   =2
flag=1
Iterationsfolge
step residualnorm  eigenvalues
0001 2.04150e+04 1.4261856e+04  2.8046718e+01
0002 7.12334e+02 6.4455421e+04  1.2209485e+03
0003 2.77080e+01 6.4460885e+04  1.6262274e+03
0004 1.58694e+00 6.4460885e+04  1.6281044e+03
0005 9.31377e-02 6.4460885e+04  1.6281108e+03
```