Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26.11.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 6

Präsenzübung

Ü 16 (*Einfache Vektoriteration*)

Bilden Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

und den Vektor

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Vektorfolge $\vec{x}^{(k+1)} = A\vec{x}^{(k)}$ für $k = 0, 1, 2, 3$ (ohne Normierung).

Bestimmen Sie anschließend die Rayleigh-Quotienten $R(\vec{x}^{(k)}; A)$ für die berechneten Vektoren und führen Sie für $R(\vec{x}^{(3)}; A)$ eine Fehlerabschätzung gemäss Satz 1.1.4 durch.

Vergleichen Sie Ihre Resultate mit dem exakten Eigenwert $\lambda_1 = 10$ und dem zugehörigen Eigenvektor $u_1 = (2, -1, -2)^T$.

Ü 17 Gegeben sei die hermitische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -9 & * & * & * & * \\ * & -2 & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 4 & * \\ * & * & * & * & 21 \end{pmatrix}$$

deren Außerdiagonalelemente betragsmäßig $\leq 1/4$ seien. Zeigen Sie:

a) Die Matrix A besitzt genau einen betragsgrößten einfachen Eigenwert λ_1.

b) Der Einheitsvektor e_5 steht nicht senkrecht auf dem Eigenvektor u_1 von λ_1.
Hinweis: ON-System der Eigenvektoren betrachten.

c) Die einfache Vektoriteration

$$\tilde{x}_{k+1} := Ax_k \qquad x_{k+1} := \frac{\tilde{x}_{k+1}}{||\tilde{x}_{k+1}||}$$

mit $x_0 = e_5$ konvergiert gegen u_1.

d) Schätzen Sie überschlagsmäßig den Fehler $R(x_5; A) - \lambda_1$ ab.

Ü 18 Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie zwei Schritte des v. Mises-Verfahrens (mit Normierung) mit Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (0.1, -0.7, -0.7, 0.1)^T$ durch.

b) Folgern Sie aus a), daß für alle $k \in \{1, 2, \ldots\}$ gilt:

$$\varrho_k = 0.14 \quad , \quad \vec{x}^{(k)} = \begin{cases} \vec{x}^{(0)}\,, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ (0.7, -0.1, -0.1, 0.7)^T\,, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

c) Was bedeutet das Resultat aus b?. Versuchen Sie eine Erklärung zu finden. Tips: Rang(A)=?, spur(A)=? , $A\ (1,1,1,1)^T\ = ?$.

Hausübung

H 16 Inverse Iteration

Gesucht ist der kleinste Eigenwert λ_3 der Matrix

$$\begin{pmatrix} 40 & 2 & 2 \\ 2 & 40 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Schätzen Sie λ_3 mit dem Satz von Gerschgorin ab.

b) Führen Sie einen Schritt des Wielandt-Verfahrens (inverse Iteration) mit $\mu = 10$ und $x_0 = (0, 0, 1)^T$ durch.

c) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu x_0, also aus $R(x_0; (A - \mu I)^{-1})$.

d) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu dem in b) bestimmten Näherungsvektor x_1, also aus $R(x_1; A)$, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus c).

Hinweis: Der betragskleinste Eigenwert ist ungefähr 9.7519 und der zugehörige Eigenvektor $(0.061782, 0.061278, -0.996176)^T$.

H 17 Wielandtverfahren: Sei μ eine Eigenwertnäherung zum Eigenwert λ der Matrix A, d.h. $Ax = \lambda x$. Dann erhält man mit dem Startvektor x_0 eine Eigenvektornäherung von x durch

$$\begin{aligned} (A - \mu I)\tilde{x}_{k+1} &= x_k \\ x_{k+1} &:= \frac{\tilde{x}_{k+1}}{||\tilde{x}_{k+1}||} \qquad \text{Wielandtverfahren} \end{aligned}$$

Mit einer Dreieckszerlegung von $A - \mu I$, d.h. $P(A - \mu I)Q = LR$ rechnet man dann gemäß

$$\begin{aligned} z_k &:= Px_k \\ Lv_k &= z_k \\ Rw_k &= v_k \\ Q^T \tilde{x}_{k+1} &= w_k. \end{aligned}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & 10 & 1 \\ -1000 & -20 & -2 \\ 1000 & 20 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 & 10 & 1 \\ 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LR$$

Führen Sie einen Schritt des Wielandtverfahrens zur Bestimmung des kleinsten Eigenwertes von $A^T A$ mit $\mu = 0$ aus. Finden Sie so eine (realistische) untere Schranke für $||A^{-1}||_2$. Wählen Sie den Startvektor für die Wielandtiteration in der Form $(a, b, c)^T$ mit $a, b, c \in \{-1, 1\}$ so, daß $||R^{-T} x_0||_\infty$ möglichst groß wird. Zeigen Sie ferner, daß $||A||_2 \approx 1000\sqrt{3}$ und berechnen Sie so eine Schätzung für $cond(A)$. Der wahre Wert ist

$$cond(A) = 2477.44... \quad \text{in der 2-Norm}$$

H 18 Sei A eine diagonalähnliche komplexe Matrix mit genau einem einfachen betragsdominanten Eigenwert λ_1. Betrachten Sie folgende Variante der direkten Iteration von v. Mises:

1. Wähle x_0 und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ geeignet.
2. Für $k = 0, \ldots,$ setze

$$\begin{aligned} y_{k+1}^H &= y_k^H A \\ x_{k+1} &= A x_k \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß dann

$$\left| \frac{y_k^H A x_k}{y_k^H x_k} - \lambda_1 \right| = \mathcal{O}(\ (|\lambda_2/\lambda_1|)^{2k})$$

gilt. Wie präzisiert man "geeignet gewählt"?

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 6, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 16 (*Einfache Vektoriteration*)

Bilden Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

und den Vektor

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Vektorfolge $\vec{x}^{(k+1)} = A\vec{x}^{(k)}$ für $k = 0, 1, 2, 3$ (ohne Normierung).

Bestimmen Sie anschließend die Rayleigh-Quotienten $R(\vec{x}^{(k)}; A)$ für die berechneten Vektoren und führen Sie für $R(\vec{x}^{(3)}; A)$ eine Fehlerabschätzung gemäss Satz 1.1.4 durch.

Vergleichen Sie Ihre Resultate mit dem exakten Eigenwert $\lambda_1 = 10$ und dem zugehörigen Eigenvektor $u_1 = (2, -1, -2)^T$.

Die Vektorfolge ist gegeben durch

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 45 \\ -22 \\ -44 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 445 \\ -222 \\ -444 \end{pmatrix}, \ \vec{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 4445 \\ -2222 \\ -4444 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechenden Rayleigh-Quotienten $R(\vec{x}^{(k)}; A) = \frac{(\vec{x}^{(k)})^T A \vec{x}^{(k)}}{(\vec{x}^{(k)})^T \vec{x}^{(k)}} = \frac{(\vec{x}^{(k)})^T \vec{x}^{(k+1)}}{(\vec{x}^{(k)})^T \vec{x}^{(k)}}$ *lauten*

$$\begin{aligned} R(\vec{x}^{(0)}; A) &= \tfrac{5}{1} = 5, \\ R(\vec{x}^{(1)}; A) &= \tfrac{445}{45} = 9.\bar{8}, \\ R(\vec{x}^{(2)}; A) &= \tfrac{44445}{4445} = 9.998875140607, \\ R(\vec{x}^{(3)}; A) &= \tfrac{4444445}{444445} = 9.999988750014. \end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung gemäss Satz 1.1.4 ergibt unter Ausnutzung von

$$A\vec{x}^{(3)} \ = \ \vec{x}^{(4)}$$

die etwas grobe Abschätzung

$$\frac{|R(\vec{x}^{(3)}; A) - \lambda|}{|\lambda|} \ \leq \ 0.001.$$

Die Eigenwertschätzung konvergiert offenbar sehr schnell. Und auch $\vec{x}^{(k)}$ *konvergiert sehr schnell gegen ein Vielfaches des Eigenvektors* $u_1 = (2, -1, -2)^T$.

Ü 17 Gegeben sei die hermitische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -9 & * & * & * & * \\ * & -2 & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 4 & * \\ * & * & * & * & 21 \end{pmatrix}$$

deren Außerdiagonalelemente betragsmäßig $\leq 1/4$ seien. Zeigen Sie:

a) Die Matrix A besitzt genau einen betragsgrößten einfachen Eigenwert λ_1.

b) Der Einheitsvektor e_5 steht nicht senkrecht auf dem Eigenvektor u_1 von λ_1.
<u>Hinweis:</u> ON-System der Eigenvektoren betrachten.

c) Die einfache Vektoriteration

$$\tilde{x}_{k+1} := Ax_k \qquad x_{k+1} := \frac{\tilde{x}_{k+1}}{||\tilde{x}_{k+1}||}$$

mit $x_0 = e_5$ konvergiert gegen u_1.

d) Schätzen Sie überschlagsmäßig den Fehler $R(x_5; A) - \lambda_1$ ab.

a) *Nach der verschärften Fassung des Kreissatzes von Gerschgorin liegt genau ein Eigenwert im Intervall* $[20, 22]$ *und alle anderen Eigenwerte sind betragsmäßig kleiner.*

b) *Weil A hermitesch ist, gibt es ein ON-System bestehend aus den Eigenvektoren u_i von A. Daher*

$$e_5 = \sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i u_i, \qquad Au_i = \lambda_i u_i, \qquad u_i^H u_j = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = e_5^T u_1 = (u_1)_5$.
Sei t die Zeilennummer mit maximaler Betragskomponente von u_1, so folgt mit $A = (\alpha_{ij})$:

$$(\alpha_{tt} - \lambda_1)\,(u_1)_t + \sum_{j=1, j\neq t}^{5} \alpha_{tj}\,(u_1)_j \;=\; 0$$

$\Rightarrow$ *(mit der Voraussetzung an die Außerdiagonalelemente)*

$$|\alpha_{tt} - \lambda_1| \;\leq\; \sum_{j=1, j\neq t}^{5} |\alpha_{tj}| \;\leq\; 1.$$

Wegen $\lambda_1 \in [20, 22]$ und $\alpha_{ii} < 19$ $i = 1, 2, 3, 4$ folgt $t = 5$, also $\varepsilon_1 \neq 0$.

c) *Mit der Diagonalähnlichkeit von A sowie den Teilen i) und ii) sind die Voraussetzungen des Satzes zur Konvergenz des v. Mises Verfahrens erfüllt.*

d) *Wir benutzen wieder die ON-Basisdarstellung von x_5.*

$$\begin{aligned}
|R(x_5,A)-\lambda_1| &= \left|\frac{x_5^T A x_5}{x_5^T x_5}-\lambda_1\right| = \frac{\left|\sum_{i=1}^5 \varepsilon_i^2\lambda_i^{11}-\lambda_1\sum_{i=1}^5 \varepsilon_i^2\lambda_i^{10}\right|}{\left|\sum_{i=1}^5 \varepsilon_i^2\lambda_i^{10}\right|} \\
&\le \frac{\displaystyle\sum_{i=2}^5 \varepsilon^2|\lambda_i-\lambda_1|\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^{10}}{\displaystyle\varepsilon_1^2+\sum_{i=2}^5\varepsilon_i^2\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^{10}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\max_{2\le i\le 5}|\lambda_i-\lambda_1|\frac{\sum_{i=2}^5\varepsilon_i^2}{\varepsilon_1^2} \\
&\le \frac{32}{1024}\frac{1-\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2}\le 0.00284,
\end{aligned}$$

weil $\max|\lambda_i-\lambda_1|\le 32$ *und* $|\lambda_i/\lambda_1|\le 1/2$ *sowie*

$$21 = R(e_5;A)=\varepsilon_1^2\lambda_1+\sum_{i=2}^5\varepsilon_i^2\lambda_i\le 22\varepsilon_1^2+10(1-\varepsilon_1^2)\ \textit{d.h.}\ \varepsilon_1^2\ge\frac{11}{12}.$$

Ü 18 Gegeben sei die Matrix

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie zwei Schritte des v. Mises-Verfahrens (mit Normierung) mit Startvektor $\vec{x}^{(0)}=(0.1,-0.7,-0.7,0.1)^T$ durch.

b) Folgern Sie aus a), daß für alle $k\in\{1,2,\dots\}$ gilt:

$$\varrho_k = 0.14 \quad , \quad \vec{x}^{(k)}=\begin{cases}\vec{x}^{(0)}, & \text{falls } k \text{ gerade}\\ (0.7,-0.1,-0.1,0.7)^T, & \text{falls } k \text{ ungerade}\end{cases}.$$

c) Was bedeutet das Resultat aus b?. Versuchen Sie eine Erklärung zu finden. Tips: Rang(A)=?, spur(A)=? , $A\ (1,1,1,1)^T\ = ?$.

a) *Die Iterationsfolge lautet*

$$\vec{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}0.1\\-0.7\\-0.7\\0.1\end{pmatrix}\quad \|\vec{x}^{(0)}\|_2=1,\qquad \varrho_0=0.14$$

$$A\vec{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}0.35\\-0.05\\-0.05\\0.35\end{pmatrix}\quad \|A\vec{x}^{(0)}\|_2=\tfrac{1}{2}\quad \vec{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}0.7\\-0.1\\-0.1\\0.7\end{pmatrix}\quad \varrho_1=0.14,$$

$$A\vec{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}0.05\\-0.35\\-0.35\\0.05\end{pmatrix}\quad \|A\vec{x}^{(1)}\|_2=\tfrac{1}{2}\quad \vec{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}0.1\\-0.7\\-0.7\\0.1\end{pmatrix}\quad \varrho_2=0.14.$$

b) *Offensichtlich osziliert die Folge bei konstanten Rayleight-Quotienten. Das Verfahren konvergiert nicht.*

c) *Das Problem ist die Existenz zweier Eigenwerte mit maximalem Betrag: Wegen Rang(A)=2 sind zwei Eigenwerte null. Da die Zeilensumme konstant* $-\frac{1}{2}$ *ist, ist ein Eigenwert* $-\frac{1}{2}$ *und wegen spur(A)=0 ein zweiter* $\frac{1}{2}$

Hausübung

H 16 Inverse Iteration

Gesucht ist der kleinste Eigenwert λ_3 der Matrix

$$\begin{pmatrix} 40 & 2 & 2 \\ 2 & 40 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Schätzen Sie λ_3 mit dem Satz von Gerschgorin ab.

b) Führen Sie einen Schritt des Wielandt-Verfahrens (inverse Iteration) mit $\mu = 10$ und $x_0 = (0,0,1)^T$ durch.

c) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu x_0, also aus $R(x_0; (A-\mu I)^{-1})$.

d) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu dem in b) bestimmten Näherungsvektor x_1, also aus $R(x_1; A)$, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus c).

Hinweis: Der betragskleinste Eigenwert ist ungefähr 9.7519 und der zugehörige Eigenvektor $(0.061782, 0.061278, -0.996176)^T$.

a) *Nach dem Kreissatz von Gerschgorin liegt der kleinste Eigenwert λ_3 von A im Intervall* $[10-4, 10+4] = [6, 14]$.

b) *Mit dem Shift $\mu = 10$ erhält man die Matrix*

$$\tilde{A} = A - \mu I = A - 10I = \begin{pmatrix} 30 & 2 & 2 \\ 2 & 30 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun muß das Gleichungssystem $(A-\mu I)x_1 = \tilde{A}x_1 = x_0$ gelöst werden:

$$\begin{array}{rrr|l} 30 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 30 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \mapsto \begin{array}{rrr|l} 1 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & 2 & -1 \\ 0 & 448 & 28 & 0 \end{array} \mapsto \begin{array}{rrr|l} 1 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \mapsto \begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

Damit lautet $x_1 = (0.25, 0.25, -4)^T$, und Normierung ergibt $\tilde{x}_1 \approx (0.062257, 0.062257, -0.996116)^T$.

c) *Mit dem Rayleigh-Quotienten erhält man zuerst eine Näherung für den Eigenwert $\sigma_i = \frac{1}{\lambda_i - \mu}$ von $\tilde{A}^{-1} = (A-\mu I)^{-1}$:*

$$\sigma_3 \approx R(x_0; \tilde{A}^{-1}) = \frac{x_0^T \tilde{A}^{-1} x_0}{x_0^T x_0} = \frac{x_0^T x_1}{x_0^T x_0} = \frac{-4}{1} = -4.$$

Wegen $\lambda_3 = \mu + \frac{1}{\sigma_3}$ liefert dies als neue Näherung für λ_3:

$$\lambda_3 \approx \mu + \frac{1}{R(x_0; \tilde{A}^{-1})} = \mu + \frac{x_0^T x_0}{x_0^T x_1} = 10 + \frac{1}{-4} \approx 9.75.$$

d) Andererseits kann man eine Näherung für λ_3 direkt über $R(x_1;A)$ berechnen:

$$R(x_1;A) = \frac{x_1^T A x_1}{x_1^T x_1} = \frac{x_1^T (A-\mu I) x_1}{x_1^T x_1} + \frac{x_1^T \mu I x_1}{x_1^T x_1} = \frac{x_1^T x_0}{x_1^T x_1} + \mu.$$

Dies ergibt die Näherung

$$\lambda_3 \approx R(x_1;A) = \mu + \frac{x_1^T x_0}{x_1^T x_1} = 10 + \frac{-4}{16.125} \approx 9.751938.$$

H 17 Wielandtverfahren: Sei μ eine Eigenwertnäherung zum Eigenwert λ der Matrix A, d.h. $Ax = \lambda x$. Dann erhält man mit dem Startvektor x_0 eine Eigenvektornäherung von x durch

$$\begin{aligned} (A-\mu I)\tilde{x}_{k+1} &= x_k \\ x_{k+1} &:= \frac{\tilde{x}_{k+1}}{||\tilde{x}_{k+1}||} \quad \text{Wielandtverfahren} \end{aligned}$$

Mit einer Dreieckszerlegung von $A - \mu I$, d.h. $P(A-\mu I)Q = LR$ rechnet man dann gemäß

$$\begin{aligned} z_k &:= Px_k \\ Lv_k &= z_k \\ Rw_k &= v_k \\ Q^T \tilde{x}_{k+1} &= w_k. \end{aligned}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & 10 & 1 \\ -1000 & -20 & -2 \\ 1000 & 20 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 & 10 & 1 \\ 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LR$$

Führen Sie einen Schritt des Wielandtverfahrens zur Bestimmung des kleinsten Eigenwertes von A^TA mit $\mu = 0$ aus. Finden Sie so eine (realistische) untere Schranke für $||A^{-1}||_2$. Wählen Sie den Startvektor für die Wielandtiteration in der Form $(a,b,c)^T$ mit $a,b,c \in \{-1,1\}$ so, daß $||R^{-T}x_0||_\infty$ möglichst groß wird. Zeigen Sie ferner, daß $||A||_2 \approx 1000\sqrt{3}$ und berechnen Sie so eine Schätzung für $cond(A)$. Der wahre Wert ist

$$cond(A) = 2477.44... \quad \text{in der 2-Norm}$$

Wahl des Startvektors: Mit $x_0 = (a,b,c)^T$ gilt:

$$y = R^{-T}x_0 \quad \Leftrightarrow \quad R^T y = x_0$$

Als Lösung des Gleichungssystems erhält man

$$y_1 = \frac{a}{1000} \quad y_2 = \frac{a}{1000} - \frac{b}{10} \quad y_3 = c - \frac{b}{10}$$

Damit $c = 1 \quad b = -1 \quad a = 1$ *(Eine andere Kombination ist natürlich auch möglich).*

$$x_0 = (1, -1, 1)^T \quad y = (0.001, 0.101, 1.1)^T$$

Weil A^TA symmetrisch und positiv definit ist, sind die Eigenwerte reell und größer Null. Es gilt daher

$$|\lambda_{min}(A^TA) - \mu| = |\lambda_{min}(A^TA)| < |\lambda(A^TA) - \mu|$$

für alle Eigenwerte λ von A^TA mit $\lambda \neq \lambda_{min}$. Somit :

$$A^TA\tilde{x}_1 = x_0 \quad \text{(Wielandtiteration mit } \mu = 0 \text{ für } A^TA)$$

$$\Leftrightarrow R^TL^TLR\tilde{x}_1 = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad L^TLR\tilde{x}_1 = R^{-T}x_0 = y$$

Löse die gestaffelten Systeme:

$$\begin{array}{rcccccccl} LR\tilde{x}_1 & =: & z & \Rightarrow & L^Tz = y & \Rightarrow & z & = & (0.102, 1.201, 1.1)^T \\ R\tilde{x}_1 & =: & w & \Rightarrow & Lw = z & \Rightarrow & w & = & (0.102, 1.303, 2.301)^T \end{array}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 = (0.001405, -0.3604, 2.301)^T$$

Nun gilt:

$$\begin{array}{rcl} ||A^{-1}||_2 & = & \sqrt{\rho((A^TA)^{-1})} = \sqrt{||(A^TA)^{-1}||_2} \\ ||\tilde{x}_1||_2 & = & ||(A^TA)^{-1}x_0||_2 \leq ||(A^TA)^{-1}||_2||x_0||_2 \quad \Rightarrow \\ ||A^{-1}||_2 & \geq & \sqrt{\dfrac{||\tilde{x}_1||_2}{||x_0||_2}} = 1.1569 \end{array}$$

Wegen

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$

und dem Kreisesatz von Gershgorin für

$$A^TA = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^6 & 5 \cdot 10^4 & 5 \cdot 10^3 \\ * & 900 & 110 \\ * & * & 14 \end{pmatrix}$$

ist offenbar

$$||A||_2 \approx 1000\sqrt{3}$$

und somit ergibt sich als Schätzwert für cond(A) 2003.8 , in Relation zu dieser einfachen Vorgehensweise also ein sehr guter Wert. Die hier behandelte Technik ist eine einfache Variante der sogenannten Konditionsschätzer, die Teil eines jeden guten Gleichungslösers sind.

H 18 Sei A eine diagonalähnliche komplexe Matrix mit genau einem einfachen betragsdominanten Eigenwert λ_1. Betrachten Sie folgende Variante der direkten Iteration von v. Mises:

1. Wähle x_0 und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ geeignet.
2. Für $k = 0, \ldots,$ setze

$$\begin{aligned} y_{k+1}^H &= y_k^H A \\ x_{k+1} &= A x_k \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß dann

$$\left| \frac{y_k^H A x_k}{y_k^H x_k} - \lambda_1 \right| = \mathcal{O}(\ (|\lambda_2/\lambda_1|)^{2k})$$

gilt. Wie präzisiert man "geeignet gewählt"?

Offenbar ist die Folge $\{y_k\}$ die Vektorfolge aus der direkten Iteration nach von Mises für A^H mit y_0 als Startvektor. In Analogie zur Konvergenzvoraussetzung für $\{x_k\}$ fordern wir deshalb

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i \quad \textit{mit} \quad \eta_1 \neq 0 \ ,$$

wobei die v_i die Linkseigenvektoren von A sind. Wir wählen diese so, daß

$$v_j^H u_i = \delta_{i,j} \quad \forall\ i, j$$

mit den u_i als (Rechts)eigenvektoren von A. Nun ist

$$\begin{aligned} x_k &= \lambda_1^k \xi_1 (u_1 + \sum_{j=2}^{n} (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k \frac{\xi_j}{\xi_1} u_j) \\ y_k &= \bar{\lambda}_1^k \eta_1 (v_1 + \sum_{j=2}^{n} (\frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_1})^k \frac{\eta_j}{\eta_1} v_j) \end{aligned}$$

und wegen der Biorthogonalität der u_i und v_j

$$\begin{aligned} \frac{y_k^H A x_k}{y_k^H x_k} &= \frac{y_k^H x_{k+1}}{y_k^H x_k} \\ &= \lambda_1 \frac{v_1^H u_1 + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j/\lambda_1)^{2k+1} (\xi_j/\bar{\eta}_j)/(\xi_1 \bar{\eta}_1) v_j^H u_j}{v_1^H u_1 + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j/\lambda_1)^{2k} (\xi_j \bar{\eta}_j)/(\xi_1 \bar{\eta}_1) v_j^H u_j} \\ &= \lambda_1 (1 + \mathcal{O}((\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{2k})) \end{aligned}$$