Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5.11.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 3

Präsenzübung

Ü 7 Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch

$$||A||_F^2 \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \ .$$

Zeigen Sie: $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 = I \ .$$

Man setze

$$E_1 = AQ_1 - Q_1 S \ .$$

Dann ist $||E_1||_F$ minimal genau für

$$S = Q_1^T A Q_1 \ .$$

Ü 8 (**Transformation auf Tridiagonalgestalt**)
Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 8 \\ -6 & 15 & 10 \\ 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

auf Tridiagonalgestalt.

Ü 9 (**Einfache Eigenwerte einer Hessenbergmatrix**)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine obere Hessenbergmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ b_2 & a_{22} & * & * \\ & \ddots & \ddots & * \\ & & b_n & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } b_i \neq 0 \ \text{ für } i = 2, ..., n$$

Zeigen Sie :

a) Alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A sind geometrisch einfach.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar, so sind sie auch algebraisch einfach.

c) Ist ein $b_i = 0$, so zerfällt das Eigenwertproblem in zwei Eigenwertprobleme für Hessenbergmatrizen niedrigerer Dimension.

Hausübung

H 7 Zeigen Sie, daß man eine Ähnlichkeitstransformation auf Hessenberggestalt auch mit unteren Dreiecksmatrizen und Zeilenvertauschungen wie bei der Gauss-Elimination erreichen kann und führen Sie dies an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

durch.
Hinweis: Einen Gauss-Eliminationsschritt kann man matriziell beschreiben durch Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix mit Diagonale $(1, \dots, 1)$ wobei nur in Spalte i unterhalb des Diagonalelementes die sogenannten Multiplikatoren stehen. Eine solche Matrix kann geschrieben werden als

$$I - a_i e_i^T$$

und ihre Inverse ist dann

$$I + a_i e_i^T$$

Man beachte, daß a_i höchstens ab dem Element $i + 1$ ungleich null ist.

H 8 Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -12 & -4 & -3 \\ -12 & 625 & 100 & 75 \\ -4 & 100 & 16 & 12 \\ -3 & 75 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation auf Tridiagonalgestalt und bestimmen Sie Konstanten $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, daß für die vier Eigenwerte λ_i von A gilt:

$$a_0 < \lambda_1 < a_1 < \lambda_2 < a_2 < \lambda_3 < a_3 < \lambda_4 < a_4.$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der a_i sowohl den Satz von Gerschgorin, als auch das Bisektionsverfahren.

H 9 Sei A eine obere Hessenbergmatrix mit nicht verschwindenden Subdiagonalelementen und $A - \mu_0 I = Q_0 R_0$ eine QR-Zerlegung von A mit Shift μ_0. Zeigen Sie: Aus $\mu_0 \to \lambda$ folgt $\rho_{nn}^{(0)} \to 0$. Dabei sei $R_0 = (\rho_{ij}^{(0)})$ und λ ein Eigenwert von A. Kein anderes Diagonalelement von R_0 kann beliebig klein werden.

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 3, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 7 Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch

$$||A||_F^2 \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \ .$$

Zeigen Sie: $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 \ = \ I \ .$$

Man setze

$$E_1 \ = \ AQ_1 - Q_1 S \ .$$

Dann ist $||E_1||_F$ minimal genau für

$$S \ = \ Q_1^T A Q_1 \ .$$

Wir gehen spaltenweise vor, was auf Grund der Definition der Frobeniusnorm möglich ist. e_j sei der $j-$te Koordinateneinheitsvektor in $\mathbb{R}^r$. Q sei die Ergänzung von Q_1 zu einem vollständigen Orthonormalsystem. Dann gilt

$$\begin{aligned}
||E_1 e_j||_2^2 &= ||AQ_1 e_j - Q_1 S e_j||_2^2 \\
&= ||Q^T(AQ_1 e_j - Q_1 S e_j)||_2^2 \\
&= ||Q_1 T A Q_1 e_j - S e_j||_2^2 + ||Q_2^T A Q_1 e_j||_2^2
\end{aligned}$$

und dies ist minimal genau dann, wenn der erste Summand null ist.

Bem.: $Q_1^T A Q_1$ wird als matrizieller Rayleighquotient bezeichnet. Wir haben hier also eine Optimalitätseigenschaft analog zu Satz 1.1.4 a) bewiesen.

Ü 8 (**Transformation auf Tridiagonalgestalt**)

Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 8 \\ -6 & 15 & 10 \\ 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

auf Tridiagonalgestalt.

Es genügt ein Schritt zur Transformation auf HESSENBERG*gestalt, die wegen der Symmetrie von A mit der gewünschten Tridiagonalgestalt übereinstimmt. Dabei ist $j = 1$ und $n = 3$, außerdem $A_1 = A$.*

Für U_1 werden β_1 und $\hat{w}_1$ benötigt, um $\binom{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} = \binom{-6}{8}$ zu transformieren. Mit

$$\sigma_1 = \sqrt{\sum_{k=j+1}^{n} |\alpha_{kj}^{(j)}|^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

ist

$$\beta_1 = \frac{1}{\sigma_1(\sigma_1 + |\alpha_{21}^{(1)}|)} = \frac{1}{10(10+6)} = \frac{1}{160}$$

und

$$\hat{w}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} - \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Von der Transformation $A_2 = U_1 A U_1$ mit

$$A_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{U}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{U}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\hat{U}_1 \\ \hat{U}_1 A_{21} & \hat{U}_1 A_{22} \hat{U}_1 \end{pmatrix}$$

sind bereits $A_{11} = 1$ und $\hat{U}_1 A_{21} = \sigma_1 \binom{1}{0} = \binom{10}{0}$ bekannt. Die Symmetrie von A liefert $A_{12}\hat{U}_1 = (10, 0)$, so daß nur $\hat{U}_1 A_{22} \hat{U}_1$ zu bestimmen ist:

$$\begin{aligned}
\hat{U}_1 A_{22} \hat{U}_1 &= (I - \beta_1 \hat{w}_1 \hat{w}_1^H) A_{22} (I - \beta_1 \hat{w}_1 \hat{w}_1^H) \\
&= \left(I - \frac{1}{160} \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \left(I - \frac{1}{160} \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 18 & 11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist somit

$$A_2 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 21 \end{pmatrix}.$$

Ü 9 (**Einfache Eigenwerte einer Hessenbergmatrix**)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine obere Hessenbergmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ b_2 & a_{22} & * & * \\ & \ddots & \ddots & * \\ & & b_n & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } b_i \neq 0 \ \text{ für } i = 2, ..., n$$

Zeigen Sie :

a) Alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A sind geometrisch einfach.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar, so sind sie auch algebraisch einfach.

c) Ist ein $b_i = 0$, so zerfällt das Eigenwertproblem in zwei Eigenwertprobleme für Hessenbergmatrizen niedrigerer Dimension.

a) *geometrisch einfach bedeutet:*
Ist λ ein Eigenwert, so gilt

$$\mathrm{Rang}(\lambda I - A) = n - 1$$

Für die Matrizen $\lambda I - A$ gilt in unserem Fall einer Hessenbergmatrix A mit $b_i \neq 0$ sind die letzten $n-1$ Zeilen linear unabhängig. Damit ist der Rang$(\lambda I - A) \geq n-1$. Da λ Eigenwert ist, ist gleichzeitig der Rang auch $\leq n-1$. Daraus folgt die Behauptung.

b) *Ist die Matrix diagonalisierbar, so hat die Matrix n Eigenvektoren und damit ist die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen, also in unserem Fall auch gleich eins.*

c) *Wenn $b_i = 0$, dann hat A folgende Gestalt:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

wobei $A_1 \in \mathbb{C}^{i-1,i-1}$ und $A_2 \in \mathbb{C}^{n-i+1,n-i+1}$ wieder Hessenbergmatrizen sind.
Um das Eigenwertproblem zu lösen bestimmt man die Schursche Normalform. Dies ergibt folgende Transformationen auf obere Dreiecksgestalt mit orthogonalen Matrizen Q_1 und Q_2: $Q_1^H A_1 Q_1$ und $Q_2^H A_2 Q_2$. Fasst man diese zu einer großen Matrix zusammen

$$Q := \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

so erhält man die Schursche Normalform von A mit $T = Q^H A Q$.

Hausübung

H 7 Zeigen Sie, daß man eine Ähnlichkeitstransformation auf Hessenberggestalt auch mit unteren Dreiecksmatrizen und Zeilenvertauschungen wie bei der Gauss-Elimination erreichen kann und führen Sie dies an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

durch.
Hinweis: Einen Gauss-Eliminationsschritt kann man matriziell beschreiben durch Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix mit Diagonale $(1, \dots, 1)$ wobei nur in Spalte i unterhalb des Diagonalelementes die sogenannten Multiplikatoren stehen. Eine solche Matrix kann geschrieben werden als

$$I - a_i e_i^T$$

und ihre Inverse ist dann

$$I + a_i e_i^T$$

Man beachte, daß a_i höchstens ab dem Element $i + 1$ ungleich null ist.

Die Pivotisierung wird analog der beim Gauss'schen Algorithmus durchgeführt, wobei nun das Element $(i+1, i)$ zum betragsgrössten unter den Elementen unterhalb der Diagonalen in Spalte i wird, $i = 1, \dots, n-2$. Die entspechende Spaltenvertauschung wird dann gleichnamig durchgeführt und zerstört die gerade erzeugten Nullen deshalb nicht. (z.B. im ersten Schritt keine Vertausuchung oder Vertauschung Spalte 2 mit Spalte $k > 2$.) Das Gleiche gilt für die Multiplikation mit der inversen Eliminationsmatrix von rechts: z.B. wird im Schritt i eine Linearkombination der Zeile $i + 1$ mit den Zeilen $j > i + 1$ ausgeführt und die entsprechende Operation von rechts berührt nicht Spalte i. Man beachte, daß hier im ersten Schritt die Multiplikatoren in Spalte 2 stehen usw.

Am Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2.5 & 2.5 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2.5 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2.5 & 3 \\ 0 & -0.5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2.5 \\ 0 & -0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2.5 \\ 0 & 0 & -0.625 & 1.3125 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & 1.125 & -1 \\ 2 & -1 & 0.125 & -1 \\ 0 & 4 & 2.6875 & 2.5 \\ 0 & 0 & -0.7890625 & 1.3125 \end{pmatrix}$$

H 8 Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -12 & -4 & -3 \\ -12 & 625 & 100 & 75 \\ -4 & 100 & 16 & 12 \\ -3 & 75 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation auf Tridiagonalgestalt und bestimmen Sie Konstanten $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, daß für die vier Eigenwerte λ_i von A gilt:

$$a_0 < \lambda_1 < a_1 < \lambda_2 < a_2 < \lambda_3 < a_3 < \lambda_4 < a_4.$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der a_i sowohl den Satz von GERSCHGORIN, als auch das Bisektionsverfahren.

Der erste Schritt der Transformation auf Tridiagonalgestalt verwendet

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{3^2+4^2+12^2} = 13, \\ \hat{w}_1 &= \begin{pmatrix} -25 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \\ \hat{U}_1 &= I - \tfrac{2}{\hat{w}_1^T\hat{w}_1}\hat{w}_1\hat{w}_1^T. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$U_1A^{(1)}U_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 11 & 13 & 0 & 0 \\ \hline 13 & & & \\ 0 & & \hat{U}_1A_{22}^{(1)}\hat{U}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Da aber $A_{22}^{(1)} = \hat{w}_1\hat{w}_1$ *gilt ist*

$$\hat{U}_1A_{22}^{(1)}\hat{U}_1 = (I - \frac{2}{\hat{w}_1^T\hat{w}_1}\hat{w}_1\hat{w}_1^T)\hat{w}_1\hat{w}_1^T(I - \frac{2}{\hat{w}_1^T\hat{w}_1}\hat{w}_1\hat{w}_1^T) = \hat{w}_1\hat{w}_1^T$$

und somit

$$A^{(2)} = U_1A^{(1)}U_1 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 0 & 0 \\ 13 & 625 & 100 & 75 \\ 0 & 100 & 16 & 12 \\ 0 & 75 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt wird verwendet

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sqrt{100^2+75^2} = 125, \\ \hat{w}_2 &= \begin{pmatrix} 225 \\ 75 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \\ \hat{U}_2 &= I - \tfrac{2}{56250}\hat{w}_2\hat{w}_2^T. \end{aligned}$$

Es ergibt sich Es ergibt sich

$$U_2A^{(2)}U_2 = \left(\begin{array}{c|c|cc} 11 & 13 & 0 & 0 \\ \hline 13 & 625 & -125 & 0 \\ \hline 0 & -125 & \hat{U}_2A_{22}^{(2)}\hat{U}_2 & \\ 0 & 0 & & \end{array}\right),$$

wobei

$$\hat{U}_2A_{22}^{(2)}\hat{U}_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Transformation von A auf Tridiagonalgestalt lautet damit

$$A^{(3)} = U_2U_1AU_1U_2 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 0 & 0 \\ 13 & 625 & -125 & 0 \\ 0 & -125 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei der Abschätzung der Eigenwerte fällt auf, daß offensichtlich ein Eigenwert von A gleich 0 ist. Zur Abschätzung der weiteren Eigenwerte kann die 3×3-Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 0 \\ 13 & 625 & -125 \\ 0 & -125 & 25 \end{pmatrix}$$

verwendet werden. Der Satz von GERSCHGORIN *liefert die Intervalle $[-2, 24]$, $[-100, 150]$ und $[487, 763]$. Man kann also wählen $a_0 = -101$ und $a_4 = 764$.*

Ferner überlappen sich die beiden ersten Intervalle, das dritte aber ist isoliert. Also kann man $a_3 \in (150, 487)$ wählen, z.B. $a_3 = 400$.

Um a_1 und a_2 zu bestimmen kann man mit dem Bisektionsverfahren in der Nähe der 0 suchen. Wir setzten also

$$\mu = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} q_1 & = & 11 & > 0 \\ q_2 & = & 625 - \frac{13^2}{11} = 609.63637 & > 0 \\ q_3 & = & 25 - \frac{125^2}{609.63} = -0.630 & < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1EW < 0.$$

$$\mu = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} q_1 & = & 12 & > 0 \\ q_2 & = & 626 - \frac{13^2}{12} = 611.91667 & > 0 \\ q_3 & = & 26 - \frac{125^2}{611.91} = 0.47 & > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{kein } EW < -1.$$

$$\mu = -0.1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} q_1 & = & 11.1 & > 0 \\ q_2 & = & 625.1 - 15.225 = 609.874 & > 0 \\ q_3 & = & 25.1 - \frac{125^2}{609.874} = -0.52 & < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1EW < -0.1.$$

Da 0 ein Eigenwert ist kann man demnach $a_0 = -1$ ansetzen und $a_1 = -0.1$.

Bei der Wahl von a_2 hilft

$$\mu = 0.1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} q_1 & = & 10.9 & > 0 \\ q_2 & = & 624.9 - \frac{13^2}{10.9} = 609.39542 & > 0 \\ q_3 & = & 24.9 - \frac{125^2}{609.395} & < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2EW > 0.1.$$

Folglich kann muß $\lambda_3 > 0.1$ sein und $a_2 = 0.1$ kann gewählt werden.

Die exakten Eigenwerte der Matrix lauten

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 & = -0.57399 \\ \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 11.31978 \\ \lambda_4 & = 650.25421 \end{array}$$

H 9 Sei A eine obere HESSENBERGmatrix mit nicht verschwindenden Subdiagonalelementen und $A - \mu_0 I = Q_0 R_0$ eine QR-Zerlegung von A mit Shift μ_0. Zeigen Sie: Aus $\mu_0 \to \lambda$ folgt $\rho_{nn}^{(0)} \to 0$. Dabei sei $R_0 = (\rho_{ij}^{(0)})$ und λ ein Eigenwert von A. Kein anderes Diagonalelement von R_0 kann beliebig klein werden.

Da λ ein Eigenwert mit Eigenvektor $x \neq 0$ der Matrix A, und μ_0 den Eigenwert λ approximiert, also $\mu_0 = \lambda + \epsilon$, gilt folgt aus der QR-Zerlegung der Matrix $A - \mu_0 I$

$$Q_0 R_0 x = (A - \mu_0 I)x = -\epsilon x.$$

Da Q_0 unitär ist gilt aber

$$R_0 x = -\epsilon Q_0^H x \quad \Rightarrow \quad \|R_0 x\| = |\epsilon| \underbrace{\|Q_0^H\|}_{=1} \underbrace{\|x\|}_{\neq 0}.$$

Somit folgt

$$\lim_{\epsilon \to 0} R_0 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\epsilon \to 0} \rho_{n,n}^{(0)} x_n = 0$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Bleibt zu zeigen, daß $x_n \neq 0$. Angenommen $x_n = 0$, dann folgt aus $Ax = \lambda x$ und der Tatsache, daß A eine HESSENBERG*matrix mit nichtverschwindenden Subdiagonalelementen, die Bedingung*

$$a_{n,n-1} x_{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n-1} = 0.$$

Induktiv ist dann aber $x = 0$. Da die QR-Zerlegung die Spaltenlängen der Matrix nicht verändert und kein Subdiagonalelement null ist, gilt

$$|\rho_{i,i}| \;\geq\; |a_{i+1,i}| \; i \;=\; 1, \ldots, n-1 \;.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.