Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29.10.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 2

Präsenzübung

Ü 4 Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ beide symmetrisch. $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 \;=\; I\;.$$

Man setze

$$E_1 \;=\; AQ_1 - Q_1 S$$

und zeige: zu jedem der r Eigenwerte von S, $\lambda_1(S),\ldots,\lambda_r(S)$ gibt es einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ von A mit

$$|\lambda_i(S) - \lambda_{j(i)}(A)| \;\le\; \sqrt{2}||E_1||_2, \quad i = 1,\ldots,r\;.$$

Hinweis: Man ergänze Q_1 zu einem vollständigen Orthonormalsystem $Q = [Q_1, Q_2]$ und setze

$$Q^T AQ \;=\; \begin{pmatrix} S & O \\ O & Q_2^T AQ_2 \end{pmatrix} + E \;=\; B + E$$

wende dann Satz 1.1.7 an und schätze dann $||E||_2$ mit Hilfe der Definition der Matrixnorm ab.

Ü 5 Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beide hermitisch und $\lambda_i(A), \lambda_j(B)$ die dazugehörigen Eigenwerte mit

$$\lambda_1(A) \ge \ldots \ge \lambda_n(A), \qquad \lambda_1(B) \ge \ldots \ge \lambda_n(B).$$

Man beweise mit Hilfe des Courant'schen Minimaxprinzips die Aussage von Satz 1.1.7

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \;\le\; \rho(B - A).$$

<u>Hinweis:</u> Man schreibe $B = A + C$ mit $C = B - A$ und versuche mit dem Minimaxprinzip, angewendet auf $A + C$, die Ungleichung

$$\lambda_i(B) \le \lambda_i(A) + \rho(C)$$

zu zeigen. Dann vertausche man die Rollen von A und B.

Ü 6 **a)** Sei $A = \text{Blockdiag}(D_1, \ldots, D_N)$ eine Blockdiagonalmatrix deren Diagonalblöcke D_i quadratische Matrizen sind. Zeigen Sie: Jeder Eigenwert von A ist Eigenwert eines D_i und umgekehrt (d.h.u.a. die Vielfachheit eines mehrfach auftretenden Eigenwertes summiert sich)

b) Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man mit Hilfe von Abschätzungen für Eigenwerte gestörter Matrizen die Eigenwerte bis auf einen Fehler von 10^{-5}.
Hinweis: Betrachten Sie mit einer Matrix B die Differenz $B - A$.

Hausübung

H 4 Sei A eine hermitische $n \times n$ Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Zeigen Sie, daß für jede Hauptuntermatrix

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ji} & \cdots & \alpha_{jj} \end{pmatrix}$$

mit $1 \leq i < j \leq n$ gilt:

a) B besitzt reelle Eigenwerte $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{j-i+1}$.

b) Es gelten die Ungleichungen $\lambda_1 \geq \mu_1$ und $\mu_{j-i+1} \geq \lambda_n$.
Hinweis: Folgern Sie die Aussagen mit Hilfe von Satz 1.1.6.

H 5 Beweisen Sie die Aussage des Satzes 1.1.8: Sei A diagonalähnlich und

$$U = (u_1, \ldots, u_n)$$

ein vollständiges Eigenvektorsystem von A. Ferner sei eine beliebige Matrix B gegeben. Dann gibt es zu jedem Eigenwert $\lambda_i(B)$ einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ so, daß gilt

$$|\lambda_{j(i)}(A) - \lambda_i(B)| \leq \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(U)\|B - A\|_2.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beweisskizze aus dem Skript und ersetzen Sie die $\|\cdot\|_\infty$ Norm durch die $\|\cdot\|_2$ Norm.

H 6 Die Singulärwerte einer $n \times n$-Matrix A sind definiert als Wurzeln der Eigenwerte der Matrix $A^H A$. Seien A und $\tilde{A}$ aus $\mathbb{C}^{N \times N}$ und $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i$ die dazugehörigen Singulärwerte für $1 \leq i \leq N$. Zeigen Sie:

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \left|\left|A - \tilde{A}\right|\right|_2 \quad 1 \leq i \leq N$$

Hinweis: Bestimmen Sie σ_i^2 mit dem Minimaxprinzip bezüglich der Matrix $A^H A$. Versuchen Sie dann mit

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_2} \leq ||A - \tilde{A}||_2 + \frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2}$$

σ_i nach oben abzuschätzen, sodaß sich die geforderte Ungleichung ohne Betragstriche ergibt. Vertauschen Sie dann die Rolle von A und $\tilde{A}$.

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 2, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 4 Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ beide symmetrisch. $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 = I .$$

Man setze

$$E_1 = AQ_1 - Q_1 S$$

und zeige: zu jedem der r Eigenwerte von S, $\lambda_1(S), \ldots, \lambda_r(S)$ gibt es einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ von A mit

$$|\lambda_i(S) - \lambda_{j(i)}(A)| \leq \sqrt{2}||E_1||_2, \quad i = 1, \ldots, r .$$

Hinweis: Man ergänze Q_1 zu einem vollständigen Orthonormalsystem $Q = [Q_1, Q_2]$ und setze

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} S & O \\ O & Q_2^T AQ_2 \end{pmatrix} + E = B + E$$

wende dann Satz 1.1.7 an und schätze dann $||E||_2$ mit Hilfe der Definition der Matrixnorm ab.

Es gilt

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} Q_1^T AQ_1 & Q_1^T AQ_2 \\ Q_2^T AQ_1 & Q_2^T AQ_2 \end{pmatrix}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} Q_1^T AQ_1 &= S + Q_1^T E_1 \\ Q_2^T AQ_1 &= Q_2^T E_1 \end{aligned}$$

Nach der Definition von B ist also (wegen der Symmetrie)

$$E = \begin{pmatrix} Q_1^T E_1 & E_1^T Q_2 \\ Q_2^T E_1 & O \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte von B sind diejenigen von S und $Q_2^T AQ_2$. Nach Satz 1.1.7 gilt bei absteigender Sortierung der Eigenwerte

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \leq ||E||_2$$

Also gibt es für die r Eigenwerte von S eine Umnumerierung der Eigenwerte von A, sodaß die Behauptung bereits gilt mit $||E||_2$ statt $\sqrt{2}||E_1||$. Nun benutzen wir die Definition der Matrixnorm zur Abschätzung von $||E||$ und partitionieren zu diesem Zweck einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ entsprechend der Partitionierung von Q in $[y; z]$ mit

$$||x||_2^2 = 1 \Leftrightarrow ||y||_2^2 + ||z||_2^2 = 1$$

Damit unter Ausmultiplizieren von Ex und Ausnutzung der Orthonormalität von Q

$$\begin{aligned} ||E||_2 &= \max_{||x||_2=1} ||Ex||_2 \\ &= \max_{||x||_2=1} || \begin{pmatrix} Q_1^T E_1 y \\ Q_2^T E_1 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1^T Q_2 z \\ O \end{pmatrix} ||_2 \\ &\leq \max_{||x||_2=1} (||E_1||_2 ||y||_2 + ||E_1^T Q_2 z||_2 \\ &\leq \max_{||x||_2=1} ||E_1||_2 (||y||_2 + ||z||_2) \\ &\leq \sqrt{2} ||E_1||_2 \end{aligned}$$

Dabei wurde zuletzt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|a+b| \; = \; |(1,1)(a,b)^T| \; \leq \; \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

ausgenutzt.
Bem.: $Q_1^T A Q_1$ wird als matrizieller Rayleighquotient bezeichnet.

Ü 5 Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beide hermitisch und $\lambda_i(A), \lambda_j(B)$ die dazugehörigen Eigenwerte mit

$$\lambda_1(A) \geq ... \geq \lambda_n(A), \qquad \lambda_1(B) \geq ... \geq \lambda_n(B).$$

Man beweise mit Hilfe des Courant'schen Minimaxprinzips die Aussage von Satz 1.1.7

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \; \leq \; \rho(B-A).$$

Hinweis: Man schreibe $B = A + C$ mit $C = B - A$ und versuche mit dem Minimaxprinzip, angewendet auf $A + C$, die Ungleichung

$$\lambda_i(B) \leq \lambda_i(A) + \rho(C)$$

zu zeigen. Dann vertausche man die Rollen von A und B.

Weil B hermitisch ist gilt,

$$\begin{aligned} \lambda_i(B) &= \min_{V\in\mathcal{V}_{i-1}} \max \left\{ R(x,B) : \; x \neq 0, x^H v = 0 \quad \forall v \in V \right\} \\ &\leq \max \left\{ R(x,B) : \; x \neq 0, x^H v = 0 \quad \forall v \in \tilde{V} \right\} \end{aligned}$$

für ein beliebiges $\tilde{V}$.
Wegen $B = A + C$ und $R(x;B) = R(x;A) + R(x;C)$ folgt

$$\begin{aligned} \lambda_i(B) &\leq \max \left\{ R(x;A) : \; x \neq 0, x^H v = 0 \quad \forall v \in \tilde{V} \right\} \\ &\quad + \max \left\{ R(x;C) : \; x \neq 0, x^H v = 0 \quad \forall v \in \tilde{V} \right\} \\ &\leq \max \left\{ R(x;A) : \; x \neq 0, x^H v = 0 \quad \forall v \in \tilde{V} \right\} + \max_{y\in\mathbb{C}^n} \left\{ R(y;C) \right\}. \end{aligned}$$

Weil C hermitisch ist, gilt

$$\max_{y \in \mathbb{C}^n} \{R(y;C)\} \leq \rho(C)$$

und weil $\tilde{V} \in \mathcal{V}_{i-1}$ beliebig wählbar war folgt

$$\lambda_i(B) \leq \lambda_i(A) + \rho(C) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i(B) - \lambda_i(A) \leq \rho(C).$$

Vertauschen wir B und A, erhält man

$$\lambda_i(A) - \lambda_i(B) \leq \rho(A - B) = \rho(B - A)$$

und ist fertig.

Ü 6 **a)** Sei $A = \text{Blockdiag}(D_1, ..., D_N)$ eine Blockdiagonalmatrix deren Diagonalblöcke D_i quadratische Matrizen sind. Zeigen Sie: Jeder Eigenwert von A ist Eigenwert eines D_i und umgekehrt (d.h.u.a. die Vielfachheit eines mehrfach auftretenden Eigenwertes summiert sich)

b) Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man mit Hilfe von Abschätzungen für Eigenwerte gestörter Matrizen die Eigenwerte bis auf einen Fehler von 10^{-5}.
Hinweis: Betrachten Sie mit einer Matrix B die Differenz $B - A$.

a) *Es gibt unitäre Matrizen U_i mit $U_i^H D_i U_i = R_i$, wobei R_i obere Dreiecksmatrizen sind (Satz von Schur). Mit der untären Blockmatrix:*

$$U = \textit{Blockdiag}(U_1, ..., U_N)$$

erhalten wir durch Transformation:

$$U^H A U = \textit{Blockdiag}(R_1, ..., R_N)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist eine obere Dreiecksmatrix mit allen Eigenwerten auf der Diagonalen.

b) *Setzen wir:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$|\lambda_i(B) - \lambda_i(A)| \leq \rho(B - A) \leq ||B - A||_\infty \leq 10^{-5}$$

Auf B können wir Teil a) anwenden und die Eigenwerte konkret ausrechnen.

$$\begin{array}{lll} \textit{erster Block} & \Rightarrow & \lambda_1(B) = 0, \quad \lambda_2(B) = 3 \\ \textit{zweiter Block} & \Rightarrow & \lambda_3(B) = 1, \quad \lambda_4(B) = 4 \end{array}$$

Hausübung

H 4 Sei A eine hermitische $n \times n$ Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Zeigen Sie, daß für jede Hauptuntermatrix

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ji} & \cdots & \alpha_{jj} \end{pmatrix}$$

mit $1 \leq i < j \leq n$ gilt:

a) B besitzt reelle Eigenwerte $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{j-i+1}$.

b) Es gelten die Ungleichungen $\lambda_1 \geq \mu_1$ und $\mu_{j-i+1} \geq \lambda_n$.
Hinweis: Folgern Sie die Aussagen mit Hilfe von Satz 1.1.6.

a) Die Hauptuntermatrizen sind (wie A) hermitisch, besitzen also reelle Eigenwerte.

b) Für μ_{j-i+1} gilt $\mu_{j-i+1} = \min_{y \neq 0} \frac{y^H B y}{y^H y}$. Erweitert man den Vektor y durch 0en auf die Dimension n in der Form $\tilde{x} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, y^H, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-j})^H$, so gilt

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x} \leq \min_{\tilde{x} \neq 0} \frac{\tilde{x}^H A \tilde{x}}{\tilde{x}^H \tilde{x}} = \min_{y \neq 0} \frac{y^H B y}{y^H y} = \mu_{j-i+1}$$

Analog zeigt man $\mu_1 \leq \lambda_1$.

H 5 Beweisen Sie die Aussage des Satzes 1.1.8: Sei A diagonalähnlich und

$$U = (u_1, \ldots, u_n)$$

ein vollständiges Eigenvektorsystem von A. Ferner sei eine beliebige Matrix B gegeben. Dann gibt es zu jedem Eigenwert $\lambda_i(B)$ einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ so, daß gilt

$$|\lambda_{j(i)}(A) - \lambda_i(B)| \leq \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(U) \|B - A\|_2.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beweisskizze aus dem Skript und ersetzen Sie die $\|\cdot\|_\infty$ Norm durch die $\|\cdot\|_2$ Norm.

O.B.d.A. sei $\lambda_i(B) \neq \lambda_j(A)$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Sonst ist die Behauptung trivial. Sei $x \neq 0$ ein Eigenvektor zu $\lambda_i(B)$. Dann kann man x darstellen als

$$x = (\lambda_i(B) I - A)^{-1} (B - A) x.$$

Eine Normabschätzung ergibt

$$\|x\|_2 \leq \|(\lambda_i(B) I - A)^{-1}\|_2 \|(B - A)\|_2 \|x\|_2$$

und somit

$$1 \leq \|(\lambda(B)I - A)^{-1}\|_2 \|(B - A)\|_2.$$

Da A diagonalisierbar ist folgt

$$\begin{aligned}
1 &\leq \|(\lambda_i(B)UU^{-1} - U\Lambda_A U^{-1})^{-1}\|_2 \|(B - A)\|_2 \\
1 &\leq \|(U(\lambda_i(B)I - \Lambda_A)U^{-1})^{-1}\|_2 \|(B - A)\|_2 \\
1 &\leq \|U\|_2 \|(\lambda_i(B)I - \Lambda_A)^{-1}\|_2 \|U^{-1}\|_2 \|(B - A)\|_2 \\
1 &\leq cond_{\|\cdot\|_2}(U) \|(\lambda_i(B)I - \Lambda_A)^{-1}\|_2 \|(B - A)\|_2
\end{aligned}$$

Die Norm der Diagonalmatrix ist gegeben durch

$$\|(\lambda_i(B)I - \Lambda_A)^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{j(i)} |\lambda_i(B) - \lambda_{j(i)}(A)|}.$$

Somit folgt die Behauptung

$$\min_i |\lambda_i(B) - \lambda_{j(i)}(A)| \leq cond_{\|\cdot\|_2}(U) \|(B - A)\|_2.$$

H 6 Die Singulärwerte einer $n \times n$-Matrix A sind definiert als Wurzeln der Eigenwerte der Matrix $A^H A$. Seien A und $\tilde{A}$ aus $\mathbb{C}^{N\times N}$ und $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i$ die dazugehörigen Singulärwerte für $1 \leq i \leq N$. Zeigen Sie:

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \left|\left|A - \tilde{A}\right|\right|_2 \quad 1 \leq i \leq N$$

<u>Hinweis:</u> Bestimmen Sie σ_i^2 mit dem Minimaxprinzip bezüglich der Matrix $A^H A$. Versuchen Sie dann mit

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_2} \quad \leq \quad ||A - \tilde{A}||_2 + \frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2}$$

σ_i nach oben abzuschätzen, sodaß sich die geforderte Ungleichung ohne Betragstriche ergibt. Vertauschen Sie dann die Rolle von A und $\tilde{A}$.

σ_i^2 ist Eigenwert der hermitischen Matrix $A^H A$. Nach dem Minimaxprinzip folgt:

$$\sigma_i^2 \quad = \quad \min_{V\in\mathcal{V}_{i-1}} \max \left\{ R(x; A^H A), \;\; x \neq 0, \;\; x^H v = 0 \quad \forall v \in V \right\}$$

wobei:

$$R(x; A^H A) \;=\; \frac{x^H A^H A x}{x^H x} \;=\; \frac{||Ax||_2^2}{||x||_2^2.}$$

Weil alle σ_i nichtnegativ sind, folgt:

$$\sigma_i \quad = \quad \min_{V\in\mathcal{V}_{i-1}} \max \left\{ \frac{||Ax||_2}{||x||_2}, \;\; x \neq 0, \;\; x^H v = 0 \quad \forall v \in V \right\}.$$

Sei jetzt $V \in \mathcal{V}_{i-1}$ beliebig und $x^H v = 0\ \forall v \in V$ sowie $x \neq 0$. Es gilt:

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_2} \quad \leq \quad ||A - \tilde{A}||_2 + \frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\max\left\{\frac{||Ax||_2}{||x||_2},\ \ x \neq 0,\ \ x^H v = 0\ \ \forall v \in V\right\} \\ &\leq\ ||A - \tilde{A}||_2 + \max\left\{\frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2},\ \ x \neq 0,\ \ x^H v = 0\ \ \forall v \in V\right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_i \quad \leq \quad ||A - \tilde{A}||_2 + \max\left\{\frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2},\ \ x \neq 0,\ \ x^H v = 0 \quad \forall v \in V\right\}$$

und weil $V \in \mathcal{V}_{i-1}$ beliebig war, folgt:

$$\sigma_i \leq ||A - \tilde{A}||_2 + \tilde{\sigma}_i \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_i - \tilde{\sigma}_i \leq ||A - \tilde{A}||_2.$$

Mit vertauschen von A und $\tilde{A}$, ergibt sich die Betragungleichung.