Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

22.10.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 1

Präsenzübung

Ü 1 (*Kreisesatz von Gerschgorin*)
Beweisen Sie den **Kreisesatz von Gerschgorin**:
Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und

$$\mathcal{K}_i := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\}$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_i := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|\}.$$

Ist $\lambda(A)$ ein Eigenwert von A, dann gilt

$$\lambda(A) \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{K}}_i \right).$$

Hinweis: Es gilt $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Betrachten Sie Zeile i mit $|x_i| = \|x\|_\infty$.

Ü 2 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit dem Kreisesatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (1, \alpha, \alpha^2)$ und einem geeigneten $\alpha \neq 0$ so auf eine Matrix $B = D^{-1}AD$, daß der Kreis um 1 isoliert wird. Wie lautet die so erhaltene Abschätzung für den Eigenwert nahe 1?

Ü 3 Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

a) Man bestimme den Eigenwert zum Eigenvektor $(1, 1, 1)^T$.

b) Sei

$$B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A - B$.

c) Berechnen Sie den kleinsten relativen Fehler

$$\alpha \;=\; \min\left\{ \frac{||y-x||_2}{||x||_2} \;:\; x = (1,1,1)^T,\; y \text{ Eigenvektor von } A - B \right\}$$

und vergleichen Sie diesen Wert mit der größtmöglichen relativen Störung des in a) errechneten Eigenwertes. Was passiert mit den Eigenwerten und Eigenvektoren von A und $A - B$ für $\varepsilon \to 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hausübung

H 1 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Kreisesatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (\alpha, 1, \beta)$ mit $\alpha, \beta \neq 0$ so, daß die Gerschgorin-Kreise von $B = D^{-1}AD$ voneinander getrennt sind. Welche Abschätzungen für die Eigenwerte von A erhalten Sie?

c) Zeigen Sie, daß die Matrix A nur reelle Eigenwerte besitzt, ohne die Eigenwerte explizit zu bestimmen.

H 2 (*Symmetrische Matritzen*)

Zeigen Sie mit Hilfe des Kreisesatzes von Gerschgorin:

a) Eine symmetrische, strikt diagonaldominante Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

b) Eine symmetrische, invertierbare, diagonaldominante (aber nicht unbedingt strikt diagonaldominante) Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

Hinweis: Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

H 3 Sensitivität eines isolierten Eigenwertes

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalähnlich mit reellen Eigenwerten, $X = (x_1, ..., x_n)$ ein vollständiges Eigenvektorensystem von A, $Ax_i = \lambda_i x_i$ sowie $\|x_i\|_2 = 1$, $i = 1, ..., n$.
Ferner sei

$$X^{-1} =: Y = \begin{pmatrix} y_1^H \\ \vdots \\ y_n^H \end{pmatrix} \qquad \text{(d.h. } y_i^H A = y_i^H \lambda_i,\ y_i \text{ sogenannter Linkseigenvektor zu } \lambda_i\text{).}$$

λ_j sei ein einfacher Eigenwert von A. Dann gilt: zu $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|F\|_2$ hinreichend klein existiert ein einfacher Eigenwert μ_j von $A + F$ mit Eigenvektor z_j, $\|z_j\|_2 = 1$ so, daß

$$\begin{aligned}
\mu_j &= \lambda_j + \frac{y_j^H F x_j}{\|y_j^H\|_2 \|x_j\|_2} \cdot \frac{\|y_j^H\|_2 \|x_j\|_2}{y_j^H x_j} + \mathcal{O}(\|F\|_2^2) \\
z_j &= x_j + \left(\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{y_i^H F x_j}{\|y_i^H\|_2 \|x_i\|_2} \cdot \frac{\|y_i^H\|_2 \|x_i\|_2}{y_i^H x_i} \cdot \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \cdot x_i \right) + \mathcal{O}(\|F\|_2^2).
\end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz über implizite Funktionen für das Problem $G(x, \lambda, \epsilon) = 0$ mit

$$\begin{aligned}
G(x, \lambda, \epsilon) &= \begin{pmatrix} (A + \epsilon F_0)x - \lambda x \\ x^T x - 1 \end{pmatrix} \\
F &= \epsilon F_0.
\end{aligned}$$

Dazu sind zunächst die Voraussetzungen zu prüfen. Dabei können sie die Matrix A zur Vereinfachung der Rechnung auf Diagonalgestalt bringen (Rücktransformation nicht vergessen!).

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 1, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 1 (*Kreisesatz von Gerschgorin*)
Beweisen Sie den **Kreisesatz von Gerschgorin**:
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und

$$\mathcal{K}_i := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\}$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_i := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|\}.$$

Ist $\lambda(A)$ ein Eigenwert von A, dann gilt

$$\lambda(A) \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{K}}_i\right).$$

Hinweis: Es gilt $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Betrachten Sie Zeile i mit $|x_i| = \|x\|_\infty$.

Wir zeigen die erste Ungleichung (die zweite ergibt sich dann aus der Tatsache, daß man die Eigenwerte von A^H durch komplexe Konjugation der Eigenwerte von A erhält). Es ist nach Voraussetzung

$$\sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i,$$

also unter Ausnutzung der Dreiecksungleichung und $|x_i| = \|x\|_\infty$

$$|a_{ii} - \lambda||x_i| = \left|\sum_{\substack{j\\ i\neq j}} a_{ij} x_j\right| \le \sum_{\substack{j\\ i\neq j}} |a_{ij}||x_j| \le |x_i| \sum_{\substack{j\\ i\neq j}} |a_{ij}|.$$

Division durch $|x_i| \neq 0$ liefert die zu zeigende Aussage.

Ü 2 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit dem Kreisesatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (1, \alpha, \alpha^2)$ und einem geeigneten $\alpha \neq 0$ so auf eine Matrix $B = D^{-1}AD$, daß der Kreis um 1 isoliert wird. Wie lautet die so erhaltene Abschätzung für den Eigenwert nahe 1?

a) *Da die Matrix A symmetrisch ist, macht es keinen Unterschied, ob man die Kreisradien über die Zeilen oder über die Spalten bildet. Es ist in beiden Fällen*

$$\mathcal{K}_1 = [0,2], \qquad \mathcal{K}_2 = [2,6], \qquad \mathcal{K}_3 = [6,8].$$

Da sich diese drei Kreise berühren, liefert der Kreisesatz von GERSCHGORIN *lediglich die Aussage, daß alle drei Eigenwerte im Intervall $[0,2] \cup [2,6] \cup [6,8] = [0,8]$ liegen. Aus Stetigkeitsgründen (die Kreise berühren sich jeweils nur in einem Punkt!) folgt sogar, daß $\lambda_1 \in \mathcal{K}_1$, $\lambda_2 \in \mathcal{K}_2$ und $\lambda_3 \in \mathcal{K}_3$ gilt.*

b) *Mit der angegebenen Transformation ist*

$$B = D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 4 & \alpha \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 7 \end{pmatrix}.$$

Da die Vorzeichen der Elemente außerhalb der Diagonale für den Kreisesatz keine Rolle spielt, kann man $\alpha > 0$ voraussetzen. Dies liefert folgende Gleichung (man betrachte Zeilenkreise und beachte, daß der Kreis um 7 einen kleineren Radius hat als der Kreis um 4):

$$\begin{aligned} 4 - \alpha - \frac{1}{\alpha} &> 1 + \alpha \\ 0 &> 2\alpha + \frac{1}{\alpha} - 3 \\ 0 &> 2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 2\left(\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(\alpha - \frac{3}{4}\right)^2\right] - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} &> \left(\alpha - \frac{3}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser quadratischen Ungleichung lautet $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 1$. Bei der Wahl $\alpha = 1$ entspricht die Matrix B gerade der Matrix A (bei der sich ja die Kreise um 1 und 4 berühren) während die Wahl α nah bei $\frac{1}{2}$ eine bessere Abschätzung liefert. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ (genau genommen müßte man hier den rechten Grenzwert gegen dieses α betrachten, weil sich für jeden ein wenig größeren Wert die Kreise nicht berühren) bekommt man die optimale Abschätzung $\lambda_1 \in \left[1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Ü 3 Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

a) Man bestimme den Eigenwert zum Eigenvektor $(1,1,1)^T$.

b) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A - B$.

c) Berechnen Sie den kleinsten relativen Fehler

$$\alpha = \min \left\{ \frac{||y - x||_2}{||x||_2} : x = (1,1,1)^T, \ y \text{ Eigenvektor von } A - B \right\}$$

und vergleichen Sie diesen Wert mit der größtmöglichen relativen Störung des in a) errechneten Eigenwertes. Was passiert mit den Eigenwerten und Eigenvektoren von A und $A - B$ für $\varepsilon \to 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

a) *Offenbar ist der Eigenwert* $1 + 2\varepsilon$.

b) *det*$(A - B - \lambda I) = (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda)\varepsilon^2 = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 2\varepsilon^2) = 0$, *also*

- **i)** $\lambda_1 = 1$ *mit dem Eigenvektor* $(1, 0, -1)^T$
- **ii)** $\lambda_2 = 1 + \varepsilon\sqrt{2}$ *mit dem Eigenvektor* $(1, \sqrt{2}, 1)^T$
- **iii)** $\lambda_3 = 1 - \varepsilon\sqrt{2}$ *mit dem Eigenvektor* $(1, -\sqrt{2}, 1)^T$

c) *Wir erhalten für die drei Eigenvektoren:*

$$\begin{aligned} \min_\mu ||x - \mu(1,0,-1)^T||_2 &= \sqrt{3} \\ \min_\mu ||x - \mu(1,\sqrt{2},1)^T||_2 &= \sqrt{3/2 - \sqrt{2}} \\ \min_\mu ||x - \mu(1,-\sqrt{2},1)^T||_2 &= \sqrt{3/2 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha = 0.1691....$ *Dieser Wert bleibt für alle* ε *konstant. Die Eigenwertstörung verhält sich anders:*

$$\frac{(1+2\varepsilon) - (1 - \sqrt{2}\varepsilon)}{1 + 2\varepsilon} = \frac{(2+\sqrt{2})\varepsilon}{1+2\varepsilon} \to 0 \text{ mit } \varepsilon \to 0.$$

Bei beiden Matrizen $A(\varepsilon)$ *und* $(A-B)(\varepsilon)$ *handelt es sich um geringe Störungen der Einheitsmatrix. Die Stetigkeit der Eigenwerte in Abängigkeit der Matrixelemente ist hier offensichtlich, genauso wie die Unstetigkeit der Eigenvektoren.*

Hausübung

H 1 (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Kreisesatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A.

b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = (\alpha, 1, \beta)$ mit $\alpha, \beta \neq 0$ so, daß die Gerschgorin-Kreise von $B = D^{-1}AD$ voneinander getrennt sind. Welche Abschätzungen für die Eigenwerte von A erhalten Sie?

c) Zeigen Sie, daß die Matrix A nur reelle Eigenwerte besitzt, ohne die Eigenwerte explizit zu bestimmen.

a) *Da die Matrix A nicht symmetrisch ist, macht es einen Unterschied, ob man die Kreisradien über die Zeilen oder über die Spalten bildet. Es ist*

$$\mathcal{K}_1 = U_6(15), \qquad \mathcal{K}_2 = U_2(8), \qquad \mathcal{K}_3 = U_6(1)$$

und

$$\tilde{\mathcal{K}}_1 = U_1(15), \qquad \tilde{\mathcal{K}}_2 = U_{12}(8), \qquad \tilde{\mathcal{K}}_3 = U_1(1).$$

Da sich die drei Kreise jeweils überscheiden, liefert der Kreisesatz von GERSCHGORIN *lediglich die Aussage, daß alle drei Eigenwerte in*

$$(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3) \cap (\tilde{\mathcal{K}}_1 \cup \tilde{\mathcal{K}}_2 \cup \tilde{\mathcal{K}}_3)$$

liegen.

b) *Mit der angegebenen Transformation ist*

$$B = D^{-1}AD = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & \frac{6}{\alpha} & 0 \\ \alpha & 8 & \beta \\ 0 & \frac{6}{\beta} & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man entsprechende Spaltenkreise, so kommt man zu den Ungleichungen

$$\begin{aligned} 15 - |\alpha| &> 8 + \frac{6}{|\alpha|} + \frac{6}{|\beta|}, \\ 8 - \frac{6}{|\alpha|} - \frac{6}{|\beta|} &> 1 + |\beta|. \end{aligned}$$

Die Wahl $\alpha = \beta > 0$ liefert (beide Ungleichungen sind dann identisch)

$$15 - \alpha > 8 + \frac{12}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 7\alpha + 12 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < \alpha < 4.$$

Eine mögliche Lösung ist z. B. $\alpha = \beta = 3.5$ und die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 15 & \frac{12}{7} & 0 \\ 3.5 & 8 & 3.5 \\ 0 & \frac{12}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Gerschgorin*-Kreisen*

$$\tilde{\mathcal{K}}_1 = U_{3.5}(15), \qquad \tilde{\mathcal{K}}_2 = U_{24/7}(8), \qquad \tilde{\mathcal{K}}_3 = U_{3.5}(1).$$

Diese sind jeweils disjunkt, also gilt für die Eigenwerte $\lambda_1 \in \tilde{\mathcal{K}}_1 = U_{3.5}(15)$, $\lambda_2 \in \tilde{\mathcal{K}}_2 = U_{24/7}(8)$ und $\lambda_3 \in \tilde{\mathcal{K}}_3 = U_{3.5}(1)$.

c) *In jedem Kreis $\tilde{\mathcal{K}}_i$ aus b) liegt jeweils ein Eigenwert von A. Damit können keine komplex konjugierten Eigenwerte existieren (diese müßten beide im selben Kreis liegen!), somit also überhaupt keine komplexen Eigenwerte (denn bei einem komplexen Eigenwert $a + ib$ ist stets auch $a - ib$ ein Eigenwert), weshalb A nur reelle Eigenwerte besitzt.*

H 2 (*Symmetrische Matritzen*)

Zeigen Sie mit Hilfe des Kreisesatzes von Gerschgorin:

a) Eine symmetrische, strikt diagonaldominante Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

b) Eine symmetrische, invertierbare, diagonaldominante (aber nicht unbedingt strikt diagonaldominante) Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

Hinweis: Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

Grundlage dieser Aufgabe ist die Aussage, daß eine symmetrische Matrix **genau dann** *positiv definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.*

a) *Bei einer strikt diagonaldominanten Matrix A gilt $|\alpha_{ii}| > \sum_{j \neq i} |\alpha_{ij}|$. Damit ist der Radius des* Gerschgorin*-Kreises um das Diagonalelement kleiner als die Entfernung des Kreismittelpunktes vom Ursprung, weshalb der Kreis entweder komplett in der negativen oder komplett in der positiven Halbebene der komplexen Zahlen liegt. Falls auch nur ein Diagonalelement negativ ist, existiert ein Kreis und damit eine Zusammenhangskomponente in der linken Halbebene, die einen Eigenwert enthalten muß. Daher sind* **genau** *die Matrizen (vom angegebenen Typ) positiv definit, die* **nur** *positive Diagonalelemente besitzen.*

b) *Für eine invertierbare, diagonaldominante Matrix argumentiert man ähnlich wie in Teil a), nur können nun Kreise durch den Ursprung gehen. Sobald ein Diagonalelement negativ ist, existiert ein Kreis und damit eine Zusammenhangskomponente, die* *komplett nicht in der rechten Halbebene liegt, also einen Eigenwert λ mit $\lambda \leq 0$ enthalten muß. Damit kann A nur positiv definit sein, wenn alle Diagonalelemente positiv sind. In diesem Fall bleibt noch der Eigenwert 0 auszuschließen, doch da die Matrizen regulär sind, besitzen sie nur von 0 verschiedene Eigenwerte.*

H 3 Sensitivität eines isolierten Eigenwertes

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalähnlich mit reellen Eigenwerten, $X = (x_1, ..., x_n)$ ein vollständiges Eigenvektorensystem von A, $Ax_i = \lambda_i x_i$ sowie $\|x_i\|_2 = 1$, $i = 1, ..., n$.
Ferner sei

$$X^{-1} =: Y = \begin{pmatrix} y_1^H \\ \vdots \\ y_n^H \end{pmatrix} \quad \text{(d.h. } y_i^H A = y_i^H \lambda_i,\ y_i \text{ sogenannter Linkseigenvektor zu } \lambda_i\text{).}$$

λ_j sei ein einfacher Eigenwert von A. Dann gilt: zu $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|F\|_2$ hinreichend klein existiert ein einfacher Eigenwert μ_j von $A + F$ mit Eigenvektor z_j, $\|z_j\|_2 = 1$ so, daß

$$\begin{aligned} \mu_j &= \lambda_j + \frac{y_j^H F x_j}{\|y_j^H\|_2 \|x_j\|_2} \cdot \frac{\|y_j^H\|_2 \|x_j\|_2}{y_j^H x_j} + \mathcal{O}(\|F\|_2^2) \\ z_j &= x_j + \left(\sum_{i=1, i \neq j}^{n} \frac{y_i^H F x_j}{\|y_i^H\|_2 \|x_i\|_2} \cdot \frac{\|y_i^H\|_2 \|x_i\|_2}{y_i^H x_i} \cdot \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \cdot x_i \right) + \mathcal{O}(\|F\|_2^2). \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz über implizite Funktionen für das Problem $G(x, \lambda, \epsilon) = 0$ mit

$$\begin{aligned} G(x, \lambda, \epsilon) &= \begin{pmatrix} (A + \epsilon F_0)x - \lambda x \\ x^T x - 1 \end{pmatrix} \\ F &= \epsilon F_0. \end{aligned}$$

Dazu sind zunächst die Voraussetzungen zu prüfen. Dabei können sie die Matrix A zur Vereinfachung der Rechnung auf Diagonalgestalt bringen (Rücktransformation nicht vergessen!).

Die Transformation auf die Diagonalgestalt erfolgt mit der gegebenen Matrix X der Eigenvektoren:

$$X^{-1} A X = D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Man definiere

$$B = X^{-1} F_0 X \to X^{-1} F X = \epsilon B.$$

Die Matrix X ist regulär und damit sind die Eigenwerte von $A + F$ mit den Eigenwerten von $X^{-1}(A + F)X$ identisch.

O.B.d.A. sei λ_1 eine einfacher Eigenwert von A. Der dazugehörige Eigenwert von D ist e_1. Um den Haupstatz über implizite Funktionen anwenden zu können muß die Jacobimatrix $\frac{\partial}{\partial(x,\lambda)}G$ im Punkt $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\epsilon}) = (e_1, \lambda_1, 0)$ regulär sein. Die Matrix ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial(x,\lambda)}G = \left(\begin{array}{c|c} D + \epsilon B - \lambda I & -x \\ \hline 2x^T & 0 \end{array}\right).$$

Einsetzen der ungestörten Daten ergibt

$$\frac{\partial}{\partial(x,\lambda)}G(e_1, \lambda_1, 0) = \left(\begin{array}{c|c} D - \lambda_1 I & -e_1 \\ \hline 2e_1^T & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & \cdots & 0 & -1 \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n - \lambda_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Da λ_1 ein einfacher Eigenwert ist, ist diese Matrix regulär. Der Hauptsatz über implizite Funktionen ist also anwendbar und somit existiert für hinreichend kleine Störungen ϵ eine eindeutige Lösung

$$(x(\epsilon), \lambda(\epsilon), \epsilon) \quad \text{von} \quad G(x, \lambda, \epsilon) = 0.$$

Ferner gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial}{\partial(x,\lambda)}G\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\epsilon}G,$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}G = \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies kann in der Taylorentwicklung von $\lambda(\epsilon)$ um $\epsilon = 0$ verwendet werden. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \lambda(\epsilon) &= \lambda_1 + \epsilon\tfrac{\partial}{\partial\epsilon}\lambda(\epsilon)|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \lambda_1 - \epsilon e_{n+1}^T \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & \cdots & 0 & -1 \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n - \lambda_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Be_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Die inverse Matrix kann man explizit berechnen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & \cdots & 0 & -1 \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n - \lambda_1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{\lambda_n - \lambda_1} & 0 \\ \hline -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Durch Einsetzen erhält man dann das Resultat

$$\begin{aligned}\lambda(\epsilon) &= \lambda_1 + \epsilon e_1^T B e_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \lambda_1 + e_1^T X^{-1} F X e_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \lambda_1 + e_1^T Y F x_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\ &= \lambda_1 + y_1^H F x_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $y_1^H x_1 = 1,\ \|x_1\|_2 = 1$. *Mit* $\|F\|_2^2 = \|\epsilon F_0\|_2^2 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ *ergibt sich schließlich*

$$\mu_j = \lambda(\epsilon) = \lambda_1 + \frac{y_1^H F x_1}{\|y_1^H\|_2 \|x_1\|_2} \cdot \frac{\|y_1^H\|_2 \|x_1\|_2}{y_1^H x_1} + \mathcal{O}(\|F\|_2^2).$$

Den Eigenvektor z_1 *berechnet man analog:*

$$\begin{aligned}x(\epsilon) &= e_1 + \epsilon \tfrac{\partial}{\partial \epsilon} x(\epsilon)|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\ &= e_1 - \epsilon(e_1, e_2, \ldots e_n, \tilde{0}) \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{\lambda_n-\lambda_1} & 0 \\ \hline -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} Be_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\ &= e_1 - \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{\lambda_n-\lambda_1} \end{pmatrix} \cdot \epsilon B e_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Mit der Transformation $z_1 = Xx(\epsilon)$ *erhält man*

$$\begin{aligned}
z_j &= Xe_1 - X \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{\lambda_n-\lambda_1} \end{pmatrix} \cdot \epsilon B e_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= x_1 - X \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{\lambda_n-\lambda_1} \end{pmatrix} \cdot X^{-1} F X e_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= x_1 - X \begin{pmatrix} \tilde{0}^H \\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot y_2^H \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n-\lambda_1} \cdot y_n^H \end{pmatrix} \cdot F x_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= x_1 - X \begin{pmatrix} \tilde{0}^H \\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot y_2^H \cdot F x_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n-\lambda_1} \cdot y_n^H \cdot F x_1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= x_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(y_i^H F x_1 \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_i} \cdot x_i \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

Mit $y_i^H x_i = 1,\ \|x_1\|_2 = 1,\ \|F\|_2^2 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ *erhält man schließlich*

$$z_1 = x_1 + \left(\sum_{i=1, i\neq 1}^{n} \frac{y_i^H F x_1}{\|y_i^H\|_2 \|x_i\|_2} \cdot \frac{\|y_i^H\|_2 \|x_i\|_2}{y_i^H x_i} \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_i} \cdot x_i \right) + \mathcal{O}(\|F\|_2^2).$$