Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28.1.2008

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 13

Präsenzübung

Ü 37 Zeigen Sie: jede komplexe $m \times n$-Matrix A kann faktorisiert werden als

$$A = U\Sigma V^H$$

mit einer unitären $m \times m$–Matrix U, einer $m \times n$–Matrix S mit $s_{1,1} \geq \ldots \geq s_{r,r} > 0$, $r =$Rang(A) und $s_{i,j} = 0$ sonst und einer unitären $n \times n$–Matrix V^H. (Diese Zerlegung wird als Singulärwertzerlegung bezeichnet, `svd`)
Hinweis: Nehmen Sie o.b.d.A. $m \geq n$ und betrachten Sie zunächst die Spektralzerlegungen von $A^H A$ und AA^H

Ü 38 Sei A eine beliebige komplexe $m \times n$-Matrix. Eine $n \times m$–Matrix $A^\#$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} A^\# A &= (A^\# A)^H \\ AA^\# &= (AA^\#)^H \\ A^\# A A^\# &= A^\# \\ AA^\# A &= A \end{aligned}$$

heisst Moore–Penrose–Pseudoinverse von A. Man kann zeigen, daß sie eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie: Ist

$$A = USV^H$$

eine Singulärwertzerlegung von A, dann gilt

$$A^\# = VS^\# U^H$$

wobei $S^\#$ aus S entsteht durch Transposition und Ersetzung der Nichtnullwerte $s_{i,i}$ durch ihre Reziprokwerte.

Ü 39 Es sei

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & -0.8 \end{pmatrix} = U\Sigma V^T$$

eine Singulärwertzerlegung von A.

Geben Sie explizit $x \in \mathbb{R}^4$ und $y \in \mathbb{R}^3$ an, so dass $\|xy^T\|_2$ minimal ist und Rang$(A + xy^T) = 2$.
Hinweis: H6

Hausübung

H 36 Zeigen Sie:
Ist A eine beliebige reelle $m \times n$–Matrix mit $m \geq n$ und $\alpha > 0$, dann ist

$$x(\alpha) = (\alpha I + A^T A)^{-1} A^T b$$

wohldefiniert und es existiert

$$x^* = \lim_{\alpha \to 0^+} x(\alpha) \ .$$

Ferner gilt:

$$\|x^*\|_2 = \min\{\|y\|_2 : \|Ay - b\|_2 \leq \|Az - b\|_2 \text{ für alle } z \in \mathbb{R}^n\} \ .$$

Lässt sich $x(\alpha)$ auch als Lösung einer linearen Ausgleichsaufgabe darstellen und so eventuell numerisch besser berechnen?

H 37 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, daß die allgemeine Lösung der linearen Ausgleichsaufgabe

$$\text{Minimiere } \|Ax - b\|_2$$

in der Form

$$x^* = A^{\#} b + (I - A^{\#} A) z, \quad z \in \mathbb{R}^n \text{ beliebig}$$

geschrieben werden kann.

Hinweis: Es sei $A = U \binom{\Sigma}{0} V^T$ die (SVD) von A und $A^{\#} = V(\Sigma^{\#}, 0) U^T$, wobei die Elemente der Diagonalmatrix $\Sigma^{\#}$ entweder die Kehrwerte der Singulärwerte σ_i sind, falls $\sigma_i \neq 0$, oder 0 falls $\sigma_i = 0$.

H 38 $U \Sigma V^H$ sei die Singulärwertzerlegung der Matrix $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ mit den singulären Werten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$. Daraus bilde man die Matrizen Σ_r und $A_r := U \Sigma_r V^H$, indem man nur die ersten r singulären Werte beibehält, also σ_k durch Null ersetzt für alle $k > r$.

a) Was sind die singulären Werte von $A - A_r$ und berechne $||A - A_r||_2$.
Zeige Rang$A_r \leq r$.

b) Es gibt keine Matrix B vom Rang höchstens r mit $||A - B||_2 < \sigma_{r+1}$.

Hinweis: H6