Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21.1.2008

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 12

Präsenzübung

Ü 34 Formulieren Sie das Wielandt-Verfahren mit Shift zur Bestimmung eines Eigenvektors eines allgemeinen Eigenwertproblems

$$Ax \;=\; \lambda Bx$$

mit reell symmetrischem A und reell symmetrischem positiv definitem B. Es soll dabei weder die Inverse von B noch die Cholesky-Zerlegung von B benutzt werden. Es tritt auch hier die Aufgabe einer mehrfachen Gleichungslösung mit einer festen Matrix auf, wenn der Shift festgehalten wird. Welches Problem entsteht bei dieser Gleichungslösung? Könnte man das Problem durch eine unitäre Vortransformation a la Tridiagonalisierung vereinfachen?
Hinweis: Arbeiten Sie zunächst formal mit der Choleskyzerlegung von B (Transformation auf ein Standard-Eigenwertproblem) und übersetzen Sie dann in die Originaldaten zurück.

Ü 35 Zeigen Sie: Ist A obere Hessenbergmatrix und B invertierbare obere Dreiecksmatrix, dann gilt:

1. AB^{-1} ist obere Hessenbergmatrix.
2. Die Elemente (2,1) von $AB^{-1} - \mu I$ und von $A - \mu B$ werden durch die gleiche Ähnlichkeitstransformation mit einer Givensmatrix in null überführt.

Ü 36 (*Transformation eines nichtlineares Eigenwertproblems*)
Gegeben sei das quadratische Eigenwertproblem

$$\left(A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0\right) x = 0,$$

mit regulärer Matrix A_2.

a) Transformieren Sie dieses polynomiale Problem in ein gewöhnliches lineares Eigenwertproblem
$$C\tilde{x} = \lambda\tilde{x}.$$
Hinweis: Eliminieren Sie zunächst den Matrixkoeffizienten vor λ^2 und setzen Sie dann den neuen Eigenvektor an als $\tilde{x} = (\lambda x, x)^T$. Wie lautet die Matrix C ?

b) Wie würde die Transformation bei einem allgemeinen polynomialen Eigenwertproblem

$$(p(\lambda))\, x = \left(\sum_{i=0}^{m} A_i \lambda^i \right) x = 0$$

(A_m regulär) aussehen ?

Hausübung

H 34 Zeigen Sie: Sind A und B beliebige reelle $n \times n$ Matrizen, dann existieren (komplex) unitäre Matrizen Q und Z mit

$$Q^H AZ = R_A \quad \text{und} \quad Q^H BZ = R_B$$

wobei R_A und R_B obere Dreiecksmatrizen sind. Wie stellt sich damit die Lösung des allgemeinen Eignwertproblems

$$Ax = \lambda Bx$$

dar? Warum muss man u.U. Q und Z komplex wählen, auch wenn A und B reell sind? (Die Aussage gilt natürlich auch für komplexe A, B)
Hinweis: Approximieren Sie B durch eine Folge invertierbarer Matrizen B_k. Benutzen Sie die Existenz der `QR`-Zerlegung und der Schur-Normalform für beliebige Matrizen.

H 35 *Lanczos für nichtsymmetrisches A* Im Folgenden sei A eine reelle nichtsymmetrische $n \times n$ Matrix. Wir untersuchen die schrittweise Herstellung einer Transformation

$$P^T AQ = T \text{ mit tridiagonalem } T \text{ und } P^T = Q^{-1} \quad (*)$$

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & . & . & . & . \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & . & . & . & . \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \gamma_3 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

1. Schreiben Sie (*) um in
$$AQ = QT .$$
Wie lautet dann eine entsprechende Gleichung für A^T ?
2. Leiten Sie aus diesen beiden Relationen Rekursionen für die Spalten p_j von P und q_j von Q her, wobei Sie wie beim Lanczosverfahren mit Hilfsvektoren $q_0 = 0$ und $p_0 = 0$ arbeiten um eine einheitliche Darstellung zu haben. Sie beginnen mit gegebenen Vektoren p_1 und q_1 mit
$$p_1^T q_1 = 1 .$$
(Dies ersetzt die Normierung auf 1 im Lanczosverfahren für den symmetrischen Fall.) Was ergibt sich also für α_i?
3. Wie drückt sich die Biorthogonalität $p_k^T q_k = 1$ mittels β_k und γ_k aus?
4. Wann kann man β_k oder γ_k null setzen und was weiss man dann von den Eigenwerten der Untermatrix T_k, der $k \times k$ Hauptuntermatrix von T?
5. Wann bricht das Verfahren ohne Ergebnis zusammen?