Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7.1.2008

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 10

Präsenzübung

Ü 28 Berechnen Sie den ersten Schritt der Ähnlichkeitstransformation auf SCHURsche Normalform für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Ein Eigenvektor von A ist $(1, 2, 2)^T$.

Ü 29 Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Shift $\mu = 1$ durch.

Ü 30 Zeigen Sie:

a) Die Schur-Normalform einer hermitischen Matrix ist diagonal.

b) Ist A eine obere Dreiecksmatrix und zugleich unitär, dann ist A diagonal mit Diagonalelementen vom Betrag 1.

Hausübung

H 28 Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem Shift $\mu = 10$ durch und bestimmen Sie eine neue Schätzung für den Eigenwert aus dem letzten Diagonalelement. (Zum Vergleich: $\lambda_2 \approx 8.8432$).

H 29 Sei A eine diagonalisierbare, nichtzerfallende reguläre obere $n \times n$ Hessenbergmatrix (d.h. $\alpha_{i,i-1} \neq 0$) mit genau einem betragskleinsten Eigenwert. Seien ferner:

$$A_0 = A, \qquad A_k = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k,$$

also A_k die iterierten Matrizen des QR Verfahrens mit dem Shift $\mu_k = 0$ für alle k. Zeigen Sie:

$$\lim_{k \to \infty} (\alpha_k)_{nn-1} = 0, \quad \text{mit } A_k = ((\alpha_k)_{ij})$$

in folgenden Schritten:

a) $\tilde{Q}_k = Q_0 \cdots Q_k, \qquad \tilde{R}_k = R_k \cdots R_0 \quad \Rightarrow \quad A_{k+1} = \tilde{Q}_k^H A \tilde{Q}_k$.

b) $A^{k+1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$.

c) Es gibt ein ν_k mit $|\nu_k| = 1$, so daß $\nu_k \tilde{Q}_k e_n = B^{k+1} e_n / ||B^{k+1} e_n||_2$ mit $B = A^{-H}$ und $e_n = (0, ..., 0, 1)^T$.

d) B aus c) erfüllt die Voraussetzungen des v.Mises Verfahrens für $x_0 = e_n$.

e) Zeigen Sie mit Hilfe von $e_{n-1}^T A_k^H e_n$ die geforderte Aussage.

H 30 Zeigen Sie: Sind Q und V beide unitär und sind sowohl

$$Q^H A Q \stackrel{def}{=} H \quad \text{und} \quad V^H A V \stackrel{def}{=} G$$

obere Hessenbergmatrizen, und ist $Qe_1 = Ve_1$, dann gilt folgendes: Sei k der kleinste Index mit

$$h_{k+1,k} = 0 \quad \text{mit } k < n$$

bzw. $k = n$. Dann gilt

$$Qe_i = \theta_i V e_i \quad \text{und} \quad |h_{i,i-1}| = |g_{i,i-1}| \quad \text{für } i = 2, \ldots, k$$

mit $|\theta_i| = 1$. Ist $k < n$, dann ist auch $g_{k+1,k} = 0$.
Hinweis: Zeigen Sie $GW = WH$ mit unitärem W und zeigen Sie, daß W diagonal sein muss. Betrachten Sie dazu die Spalten 1 bis $k-1$ von GW.
Bem.: Dieser Satz wird benötigt, um die implizite Shift-Technik beim QR-Verfahren zu begründen und den konjugiert-komplexen Doppelshift im Reellen ausführen zu können.