Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17.12.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 9

Präsenzübung

Ü 25 In der Vorlesung wurde gezeigt, daß sich der Winkel φ einer Jacobirotation zur Annullierung des Elementes $a_{p,q},\ q > p$ einer reell symmetrischen Matrix aus

$$\cot(2\varphi) \ = \ \frac{a_{q,q} - a_{p,p}}{2a_{p,q}}$$

berechnen lässt. Zeigen Sie, daß man

$$c \ = \ \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad s \ = \ \sin(\varphi)$$

ohne Berechnung von φ selbst berechnen kann, wobei $\varphi \ \leq \ \pi/4$ gewählt werden kann. Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $t \ = \ \tan(\varphi)$, dann daraus c und schliesslich s.

Ü 26 Zeigen Sie: Wird eine Jacobirotation auf eine symmetrische Matrix angewendet wie in Ü25, dann kann die Änderung der Diagonalelemente berechnet werden aus

$$a_{p,p} \ = \ a_{p,p} - ta_{p,q} \quad \text{und} \quad a_{q,q} \ = \ a_{q,q} + ta_{p,q}$$

mit t in der gleichen Bedeutung wie dort.

Ü 27 In der Vorlesung wurde gezeigt, daß sich die Frobeniusnorm der Matrix unter der Transformation mit einer Jacobirotation nicht ändert, während die Quadratsumme der Ausserdiagonalelemente um $2a_{p,q}^2$ abnimmt. Beweisen Sie die Konvergenz des Verfahrens unter der Festlegung

$$|a_{p,q}| \ \stackrel{!}{=} \ \max_{i,j}\{|a_{i,j}| \ : \ i \ \neq \ j\}$$

Hinweis: Ist

$$2\omega(A) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \, = \, 1 \\ j \, \neq \, i}}^{n} |a_{i,j}|^2$$

dann soll gelten

$$\omega(A^{(k+1)}) \ \leq \ c\omega(A^{(k)})$$

mit einer Konstanten $0 \ < \ c \ < \ 1$.

Hausübung

H 25 Zeigen Sie: das Jacobi-Eigenwertverfahren konvergiert auch in der `treshold`-Variante:

```
while omega(A) > 0
  tresh=sqrt(omega)/(4*n);
  for i = 1:n
    for j=i+1:n
       if (abs(a(i,j))) > tresh
          rotate(i,j);
       end
    end
  end
end
```

H 26 Es sei eine Jacobirotation zur Annullierung von $a_{p,q}$ anzuwenden. Die Zeilen p und q der Matrix werden dann multipliziert mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

und in einem zweiten Schritt die Spalten mit der Transponierten dieser Matrix. Zeigen Sie: statt die Rotation durch

$$\begin{aligned} a_{p,.} &= c a_{p,.} - s a_{q,.} \\ a_{q,.} &= s a_{p,.} + c a_{q,.} \end{aligned}$$

durchzuführen kann man auch rechnen

$$\begin{aligned} a_{p,.} &= a_{p,.} - s(a_{q,.} + \tau a_{p,.}) \\ a_{q,.} &= a_{q,.} + s(a_{p,.} - \tau a_{q,.}) \end{aligned}$$

mit

$$\tau = \tan(\varphi/2) = \frac{s}{1+c} .$$

H 27 Programmieren Sie das Jacobi-Verfahren unter Berücksichtigung der rechentechnischen Modifikationen aus diesem Übungsblatt in der `treshold`–Variante, wobei Sie in jedem "sweep" die Summe der Quadrate der Ausserdiagonalelemente neu berechnen und `tresh` wie in der Hausübung 25 setzen. Erproben Sie das Verfahren an geeigneten Matrizen, z.B. denjenigen, die Sie schon für die Methoden `rqi` und `RR` benutzt haben.