Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10.12.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 8

Präsenzübung

Ü 22 Es sei $A = A^H$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ und S beliebig, aber vom Rang p in $\mathbb{C}^{n\times p}$ mit $p < n$. Zeigen Sie: ist der Bildraum von AS im Bildraum von S enthalten, dann wird besitzt der Bildraum von S eine Basis aus Eigenvektoren von A.

Ü 23 Im Folgenden bezeichne span(A) den Bildraum der Matrix A. Es sei wieder $A = A^H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $Y_k \in \mathbb{C}^{n\times p}$ mit $p < n$. Wir betrachten die `RR`-Iteration

1. $$\hat{Y}_k = AY_{k-1}$$
2. $$\hat{Y}_k = Q_k R_k, Q_k^H Q_k = I_p$$
3. $$Q_k^H A Q_k = V_k \Sigma_k V_k^H \quad \text{Spektralzerlegung}$$
4. $$Y_k = Q_k V_k$$

Zeigen Sie
$$\mathrm{span}(Y_k) = \mathrm{span}(A^k Y_0)$$

Ü 24 Zeigen Sie: Ist $A = A^H$ und
$$A = U\Lambda U^H \text{ Spektralzerlegung von } A$$
sowie $\{Y_k\}$ die mit orthonormiertem Y_0 erzeugte Matrizenfolge aus `RR`, sowie
$$Z_0 = U^H Y_0$$
dann ist $\{Z_k\} = \{U^H Y_k\}$ die von `RR` erzeugte Matrizenfolge für Λ. Welche Konsequenz ziehen Sie daraus für eine theoretische Konvergenzuntersuchung für `RR`?.

Hausübung

H 22 Zeigen Sie: Ist

$$I + E^H E = Z^H Z$$

mit $I,\ Z\ \in\ \mathbb{C}^{p\times p}$ und $E\ \in\ \mathbb{C}^{m\times p}$ dann kann gilt

$$Z = (I + \mathcal{O}(||E||))W$$

mit unitärem W.
Hinweis: Jede Matrix kann nach `QR` zerlegt werden. Betrachten Sie die Cholesky-Zerlegung von $I + E^H E$ und die `QR`-Zerlegung von Z.

H 23 Seien $A = A^H$ und

$$|\lambda_1|\ \geq\ \ldots\ |\lambda_p|\ >\ |\lambda_{p+1}|\ \geq\ \ldots\ \geq\ |\lambda_n|$$

die Eigenwerte von A mit den orthonormierten Eigenvektoren u_i. Ferner sei Y_0 in $\mathbb{C}^{n\times p}$ mit

$$Y_0^H Y_0\ =\ I_p\ \text{ und }\ (u_1,\ldots,u_p)^H Y_0 \text{ invertierbar }.$$

Zeigen Sie : die von `RR` erzeugte Folge Y_k erfüllt

$$\lim_{k\,\to\,\infty} ||AY_k - Y_k(Y_k^H A Y_k)||\ =\ 0$$

Sind die p betragsgrössten Eigenwerte auch alle paarweise verschieden, dann konvergiert sogar Spalte i von Y_k gegen u_i bis auf einen Faktor vom Betrage eins. Versuchen Sie, die Konvergenzrate möglichst gut abzuschätzen.
Hinweis: Benutzen Sie die Resultate der Gruppenübung. O.B.d.A. können Sie also $A\ =\ \Lambda$ diagonal wählen. Damit vereinfacht sich die Formulierung der Voraussetzung an Y_0. Nun stellen Sie Y_k als Basis des Bildsraums von $A^k Y_0$ geeignet dar und berücksichtigen, daß

$$Y_k^H Y_k\ =\ I_p$$

Sie werden dann auf eine Anwendung der ersten Hausübung geführt.

H 24 Programmieren Sie unter Zuhilfenahme der Funktion `gramschmidt` im directory der Uebungslösungen und der `MATLAB`–Funktion `eig` das Verfahren `RR` und testen Sie es an einigen Matrizen aus `elmat` und `gallery` (z.B. `rosser, hilb, pascal, hankel(c,r), gallery('ris',n)` etc) Lassen Sie sich die exakten Eigenwerte dieser Matrizen erst anzeigen, bevor Sie p wählen. Bei `rosser` ist $p = 2$ sehr ambitioniert, $p = 6$ sollte dagegen problemlos sein. Ihre Funktion könnte z.B. so aussehen:

```
%function [Y,Lambda,flag,history,historyend]=RR(A,Y0,m,maxiter,rfac,epsilon)
% [Y,Lambda,history,historylength]=RR(A,Y0,m,maxiter,rfac,epsilon)
% computes the p leading eigenvalues Lambda(1),..,Lambda(p)
% with corresponding eigenvectors Y(:,i) of the symmetric
% n times n matrix A using the Rayleigh-Ritz-method
% aiming for obtaining
%
% norm(A*Y-Y*diag(Lambda),inf) ¡= epsilon*norm(A).
```