Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3.12.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 7

Präsenzübung

Ü 19 Es sei $A = A^H$ und $x \neq 0$. Setzen Sie

$$\varrho = R(x; A) \quad \text{und} \quad r = Ax - \varrho x \; .$$

Zeigen Sie:

a) Sind r und x linear abhängig, dann ist x ein Eigenvektor und geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.

b) Sind r und x linear unabhängig, dann gilt mit

$$M \stackrel{def}{=} \frac{xr^H + rx^H}{x^H x}$$

1.
$$(A - M)x = \varrho x$$

2.
$$||M||_2 = \frac{||r||_2}{||x||_2}$$

3.
$$\exists \lambda = \lambda(A) : \quad |\lambda - \varrho| \leq \frac{||r||_2}{||x||_2}$$

Ü 20 Sei im Folgenden wiederum A hermitisch. Die `RQI`-Iteration (Rayleigh-Quotient-Iteration) ist definiert durch die iterative Berechnungsvorschrift

1. $\varrho_k = R(x^k; A)$
2. Wenn $A - \varrho_k I$ singulär ist, dann löse

$$(A - \varrho_k I) y_{k+1} = 0$$

und breche die Iteration ab, andernfalls löse

$$(A - \varrho_k I) y_{k+1} = x_k$$

3.
$$x_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{||y_{k+1}||}$$

Bem.: Man kann die Normierung der Vektoren auch völlig unterlassen und erst bei der Beendigung der Iteration mit einem geeigneten Abbruchkriterium (z.B. $||y_{k+1}|| > ||x_k||/\texttt{eps}$, wobei `eps` die Rechengenauigkeit bezeichnet) vornehmen.

a) Führen Sie zwei Schritte von `RQI` aus für

$$A = \operatorname{diag}(4, 2, 1) \quad \text{und} \quad x_0 = (0.1, 1, 0.1)^T .$$

b) Zeigen Sie: Ist (ϱ_k, x_k) eine von `RQI` erzeugte Folge für die Matrix A, dann ist (ϱ_k, Qx_k) eine von `RQI` erzeugte Folge für $B = QAQ^H$ mit dem Startvektor Qx_0 bei unitärem Q. Welche Konsequenz ziehen Sie daraus für eine Konvergenzanalyse von `RQI`?

Ü 21 Sei weiter wie in Übung 20 (ϱ_k, x_k) die von `RQI` erzeugte Folge bei hermitischem A und es gelte

$$x_k \rightarrow z \quad \text{mit } z \text{ Eigenvektor von } A .$$

Man definiere ϕ_k als Winkel zwischen x_k und z und u_k aus

$$x_k = z\cos(\phi_k) + u_k \sin(\phi_k)$$

mit $u_k^H z = 0$ und $||u_k||_2 = 1$. Man zeige

$$\lambda - \varrho_k = (\lambda - R(u_k; A)) \sin^2(\phi_k)$$

Hausübung

H 19 Sei weiterhin A hermitisch. Zeigen Sie mit Hilfe der Gruppenübungen 20 und 21: konvergiert eine von `RQI` erzeugte Vektorfolge $\{x_k\}$ gegen einen Eigenvektor z von A, dann gilt für den Winkel ϕ_k zwischen z und x_k

$$\exists \lim_{k \to \infty} \left|\frac{\phi_{k+1}}{\phi_k^3}\right| \leq \gamma$$

Hinweis: benutzen Sie insbesondere die Gruppenübung 21 sowie die speziell wählbare Form der Matrix und damit von z.
Bem.: Man kann sogar $\gamma \leq 1$ zeigen.

H 20 Zeigen Sie: Für hermitisches A gilt für `RQI` mit der Bezeichnung

$$r_k = Ax_k - R(x_k; A)x_k$$

daß

$$||r_{k+1}||_2 \leq ||r_k||_2 \; .$$

Hinweis: Benutzen Sie die Optimalitätseigenschaft des Rayleighquotienten und die Tatsache daß $|x^H y| = ||x||_2 ||y||_2$ wenn x und y linear abhängig sind.

H 21 Erstellen Sie für tridiagonales A ein `MATLAB`-Programm zur Implementierung von `RQI` und testen Sie es an den Beispielen aus H15 (Routine `tridigen`). Wählen Sie als Startvektor verschiedene Einheitsvektoren.