Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26.11.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 6

Präsenzübung

Ü 16 (*Einfache Vektoriteration*)

Bilden Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

und den Vektor

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Vektorfolge $\vec{x}^{(k+1)} = A\vec{x}^{(k)}$ für $k = 0, 1, 2, 3$ (ohne Normierung).

Bestimmen Sie anschließend die Rayleigh-Quotienten $R(\vec{x}^{(k)}; A)$ für die berechneten Vektoren und führen Sie für $R(\vec{x}^{(3)}; A)$ eine Fehlerabschätzung gemäss Satz 1.1.4 durch.

Vergleichen Sie Ihre Resultate mit dem exakten Eigenwert $\lambda_1 = 10$ und dem zugehörigen Eigenvektor $u_1 = (2, -1, -2)^T$.

Ü 17 Gegeben sei die hermitische Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} -9 & * & * & * & * \\ * & -2 & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 4 & * \\ * & * & * & * & 21 \end{pmatrix}$$

deren Außerdiagonalelemente betragsmäßig $\leq 1/4$ seien. Zeigen Sie:

a) Die Matrix A besitzt genau einen betragsgrößten einfachen Eigenwert λ_1.

b) Der Einheitsvektor e_5 steht nicht senkrecht auf dem Eigenvektor u_1 von λ_1.
Hinweis: ON-System der Eigenvektoren betrachten.

c) Die einfache Vektoriteration

$$\tilde{x}_{k+1} := Ax_k \qquad x_{k+1} := \frac{\tilde{x}_{k+1}}{||\tilde{x}_{k+1}||}$$

mit $x_0 = e_5$ konvergiert gegen u_1.

d) Schätzen Sie überschlagsmäßig den Fehler $R(x_5; A) - \lambda_1$ ab.

Ü 18 Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie zwei Schritte des v. Mises-Verfahrens (mit Normierung) mit Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (0.1, -0.7, -0.7, 0.1)^T$ durch.

b) Folgern Sie aus a), daß für alle $k \in \{1, 2, \ldots\}$ gilt:

$$\varrho_k = 0.14 \quad , \quad \vec{x}^{(k)} = \begin{cases} \vec{x}^{(0)}\,, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ (0.7, -0.1, -0.1, 0.7)^T\,, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} .$$

c) Was bedeutet das Resultat aus b?. Versuchen Sie eine Erklärung zu finden. Tips: Rang(A)=?, spur(A)=? , $A\ (1,1,1,1)^T\ = ?$.

Hausübung

H 16 Inverse Iteration

Gesucht ist der kleinste Eigenwert λ_3 der Matrix

$$\begin{pmatrix} 40 & 2 & 2 \\ 2 & 40 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} .$$

a) Schätzen Sie λ_3 mit dem Satz von Gerschgorin ab.

b) Führen Sie einen Schritt des Wielandt-Verfahrens (inverse Iteration) mit $\mu = 10$ und $x_0 = (0, 0, 1)^T$ durch.

c) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu x_0, also aus $R(x_0; (A - \mu I)^{-1})$.

d) Bestimmen Sie eine neue Näherung für λ_3 aus dem Rayleighquotienten zu dem in b) bestimmten Näherungsvektor x_1, also aus $R(x_1; A)$, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus c).

Hinweis: Der betragskleinste Eigenwert ist ungefähr 9.7519 und der zugehörige Eigenvektor $(0.061782, 0.061278, -0.996176)^T$.

H 17 Wielandtverfahren: Sei μ eine Eigenwertnäherung zum Eigenwert λ der Matrix A, d.h. $Ax = \lambda x$. Dann erhält man mit dem Startvektor x_0 eine Eigenvektornäherung von x durch

$$\begin{aligned} (A - \mu I)\tilde{x}_{k+1} &= x_k \\ x_{k+1} &:= \frac{\tilde{x}_{k+1}}{||\tilde{x}_{k+1}||} \qquad \text{Wielandtverfahren} \end{aligned}$$

Mit einer Dreieckszerlegung von $A - \mu I$, d.h. $P(A - \mu I)Q = LR$ rechnet man dann gemäß

$$\begin{aligned} z_k &:= Px_k \\ Lv_k &= z_k \\ Rw_k &= v_k \\ Q^T \tilde{x}_{k+1} &= w_k. \end{aligned}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & 10 & 1 \\ -1000 & -20 & -2 \\ 1000 & 20 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 & 10 & 1 \\ 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LR$$

Führen Sie einen Schritt des Wielandtverfahrens zur Bestimmung des kleinsten Eigenwertes von $A^T A$ mit $\mu = 0$ aus. Finden Sie so eine (realistische) untere Schranke für $||A^{-1}||_2$. Wählen Sie den Startvektor für die Wielandtiteration in der Form $(a, b, c)^T$ mit $a, b, c \in \{-1, 1\}$ so, daß $||R^{-T} x_0||_\infty$ möglichst groß wird. Zeigen Sie ferner, daß $||A||_2 \approx 1000\sqrt{3}$ und berechnen Sie so eine Schätzung für $cond(A)$. Der wahre Wert ist

$$cond(A) = 2477.44... \quad \text{in der 2-Norm}$$

H 18 Sei A eine diagonalähnliche komplexe Matrix mit genau einem einfachen betragsdominanten Eigenwert λ_1. Betrachten Sie folgende Variante der direkten Iteration von v. Mises:

1. Wähle x_0 und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ geeignet.
2. Für $k = 0, \ldots,$ setze

$$\begin{aligned} y_{k+1}^H &= y_k^H A \\ x_{k+1} &= A x_k \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß dann

$$\left| \frac{y_k^H A x_k}{y_k^H x_k} - \lambda_1 \right| = \mathcal{O}(\ (|\lambda_2/\lambda_1|)^{2k})$$

gilt. Wie präzisiert man “geeignet gewählt“?