Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

19.11.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 5

Präsenzübung

Ü 13 Sei L eine untere $n \times n$ Dreiecksmatrix der Form

$$L \;=\; I + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j e_{k(j)} e_j^T$$

mit

$$\mid \alpha_j \mid \;\leq\; 1 \text{ und } k(j) \;>\; j,\; k(1) \;\leq\; \ldots\; k(n-1)\;.$$

Zeigen Sie

$$\mid (L^{-1})_{i,j} \mid \;\leq\; 1 \quad \forall\, i,j$$

Hinweis: Betrachten Sie das Produkt von Zeile r von L^{-1} mit den Spalten $1,\ldots,r-1$ von L.

Ü 14 Es sei H eine nichtzerfallende obere Hessenbergmatrix und

$$H \;=\; QR$$

eine durch Anwendung von Givensreflektoren von links auf H erzeugte `QR`-Zerlegung, d.h. Q ist unitär und R eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie

1. Es gilt
$$|r_{i,i}| \;\geq\; |h_{i+1,i}| \;>\; 0\;,\; i = 1,\ldots,n-1\;.$$
2. Q ist eine obere Hessenbergmatrix.
3. RQ ist eine obere Hessenbergmatrix und ähnlich zu H.

Hinweis: Beachten Sie, in welcher Reihenfolge Q aus den einzelnen Givensreflektoren zusammenmultipliziert wird.

Ü 15 Bestimmen Sie die vollständige Struktur des Eigensystems einer Rang–1–Matrix

$$A \;=\; uv^H \;\neq\; O\;.$$

Wie verhält sich eine Vektorfolge

$$A^k x_0$$

mit beliebigem x_0?
Hinweis: entwickeln Sie x_0 nach v und dem Orthogonalraum zu v.

Hausübung

H 13 Zeigen Sie: Ist R eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonale $(1,\dots,1)$ und $|r_{i,j}| \;\leq\; 1$ für $i < j$, dann gilt für die Elemente der Inversen

$$|(R^{-1})_{i,j}| \;\leq\; 2^{j-i-1}$$

Hinweis: verifizieren Sie zunächst die Block-Inversionsformel

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ O & R_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & -R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1} \\ O & R_{22}^{-}1 \end{pmatrix}$$

Dabei sind die R_{ii} quadratische Matrizen. Wenden Sie diese nun rekursiv auf R an, beginnend "rechts unten" unter Hinzufügung je einer Zeile.

H 14 Gegeben sei

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad (\text{" Jordan–Kästchen "}) \text{ mit } \lambda \neq 0$$

Zeigen Sie, daß die Vektorfolge

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= Jx_k \\ x_{k+1} &= \frac{\tilde{x}_{k+1}}{|\tilde{\xi}_{1,k+1}|} \end{aligned}$$

mit $\tilde{x}_{k+1} = (\tilde{\xi}_{1,k+1}, ..., \tilde{\xi}_{n,k+1})^T$ (direkte Iteration mit Normierung der ersten Komponente) und $x_0 = (1, ..., 1)^T$ als Startvektor gegen einen (welchen ?) Eigenvektor x von J konvergiert und schätzen Sie die Fehlerreduktion

$$\frac{\|x_{k+1} - x\|_\infty}{\|x_k - x\|_\infty}$$

größenordnungsmäßig.
<u>Hinweis</u>: Zeigen Sie zunächst, daß

$$\begin{aligned} J^k &= \sum_{\nu=0}^{\min\{n-1,k\}} \lambda_1^{k-\nu} \binom{k}{\nu} T_\nu \qquad \text{mit} \qquad T_\nu = \left(\tau_{ij}^{(\nu)}\right), \\ \tau_{ij}^{(\nu)} &= \begin{cases} 1\,, & j = i+\nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

H 15 Schreiben Sie ein MATLAB–Unterprogramm

```
function [lambda,V]=tridiewev(a,b) % [lambda,V,resnorm]=tridiewev(a,b)
% berechnet alle Eigenwerte lambda(i) der reellen symmetrischen
Dreibandmatrix
% T mit Diagonale a(1:n) und Nebendiagonale b(1:n-1)
% nach der Bisektionsmethode auf Maschinengenauigkeit und die
% zugehörigen Eigenvektoren durch Loesung der homogenen Gleichung
% mit Normierung auf Länge 1.
% Das System werde geloest als
% P(T-lambda(i)*I) =L*R
% R*V(:,i)= R(k,k)*(0,...,0,1)' and V(k,i)=1 if R(k,k)=0
% where R(k,k) is the first under the smallest pivots, seen from the
% bottom
```

und erproben Sie es an den mit der MATLAB-Routine `tridigen` erzeugten Matrizen. Die Routine finden Sie bei den Lösungen.

```
function [a,b]=tridigen(exam)
% [a,b]=tridigen(exam) erzeugt verschiedene symmetrische
% dreibandmatrizen. hier sind vorgesehen die faelle exam='exam1'
% bis 'exam4' gemaess UE15 WS2007/2008.
%
switch lower(exam)
    case {'exam1'}
        n=21;
        b=ones(n-1,1);
        for i=1:n
          a(i)=11-i;
        end
        %eigenwerte symmetrisch um null, nahe bei +/- i, i=1,10, und 0
    case {'exam2'}
        n=21;
        a=2*ones(n,1);
        b=-ones(n-1,1);
        % eigenwerte 2(1-cos(k*pi/22))  k=1,..,21
    case {'exam3'}
        n=21;
        b=ones(n,1);
        for i=1:n
            a(i)=abs(11-i);
        end
        % extrem dicht liegende eigenwertpaare aehnlich zu exam1 absolut
    case {'exam4'}
        n=20;
```

```
        a=zeros(n+1,1);
        for i=1:n
            b(i)=sqrt(i*(n-i+1));
        end
        % eigenwerte +(-)20, +(-)18,..,,+(-)2,0
    otherwise
        error('diese eingabe ist nicht definiert');
end
```

Berechnen Sie auch die Testgrösse `norm(V'*V-I)`. Entspricht das Resultat den theoretischen Vorhersagen?