Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12.11.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 4

Präsenzübung

Ü 10 Sei A eine beliebige $n \times n$ nichtzerfallende obere Hessenberg–Matrix. Zeigen Sie, daß man das charakteristische Polynom

$$p_0(\lambda) \;=\; \det(A - \lambda I)$$

und seine Ableitung $p_0'(\lambda)$ bis auf einen gemeinsamen Faktor

$$\frac{1}{(-1)^n \prod_{i=1}^{n-1} a_{i+1,i}}$$

aus folgender Rekursion berechnen kann, die man sowohl mit einem Zahlenwert für λ als auch symbolisch ausführen kann:

$$\begin{aligned}
p_n(\lambda) &= 1\\
p_n'(\lambda) &= 0\\
p_{n-i}(\lambda) &= \frac{1}{a_{n-i+1,n-i}}\Big(\lambda p_{n-i+1}(\lambda) - \sum_{k=n-i+1}^{n} a_{n-i+1,k} p_k(\lambda)\Big)\,, \quad i = 1,\dots,n\\
p_{n-i}'(\lambda) &= \frac{1}{a_{n-i+1,n-i}}\Big(\lambda p_{n-i+1}'(\lambda) + p_{n-i+1}(\lambda) - \sum_{k=n-i+1}^{n} a_{n-i+1,k} p_k'(\lambda)\Big)\,, \quad i = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

wobei noch $a_{1,0} = 1$ gesetzt ist. Ist λ ein Eigenwert, dann ist $(p_1,\dots,p_n)^T$ ein zugehöriger Eigenvektor. Wie könnte man höhere Ableitungen von p_0 berechnen?
Hinweis: Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda I)\vec{p} \;=\; p_0 e_1 \quad \text{mit} \quad e_1 \;=\; (1,0,\dots,0)^T\,.$$

Ü 11 Es sei A eine nichtzerfallende obere Hessenbergmatrix. Zeigen Sie: jeder Eigenvektor von A hat eine letzte Komponente ungleich null und jeder Linkseigenvektor hat eine erste Komponente ungleich null.

Ü 12 a) Bestimmen Sie eine orthonormale und symmetrische 2×2-Matrix

$$G = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

so, daß

$$GA = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & * \\ b & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

für jede reelle 2×2-Matrix A (man nennt ein solches G eine Givens-Drehung).

b) Wie kann man das Resultat aus a) verwenden, um eine obere Hessenberg-Matrix H mit einer unitären Matrix G in eine obere Dreiecksmatrix R zu transformieren $GH = R$?
Hinweis: Betten Sie die 2×2-Matrizen aus a) in größere Matrizen ein, so daß diese noch unitär sind, und überlegen Sie sich, welches Element der Subdiagonalen damit eliminiert wird. Wie kann man die Wirkung dieser Rotationen geschickt kombinieren, um das Ziel zu erreichen ?

Hausübung

H 10 Das Resultat von Gruppenübung 10 kann man zum Entwurf eines Eigenwertlösers benutzen, wenn man ein global konvergentes Nullstellenverfahren für Polynome besitzt. Ist der grösste bzw. kleinste Eigenwert einfach und reell, dann konvergiert das Newtonverfahren mit Startwerten rechts vom grössten bzw links vom kleinsten Eigenwert monoton und global. Schreiben Sie ein `MATLAB`–Programm, das zu einem gegebenen Startwert das Newtonverfahren zur Bestimmung eines Eigenwerts und eines zugehörigen Eigenvektors einer nichtzerfallenden oberen Hessenbergmatrix benutzt. Die Form dieses Programms sei eine Funktion

```
function [lambda,x,count,lastp0,resnorm] = newton(A,initlambda,trace)
% Aufruf [lambda,x,count,lastp0,resnorm] = newton(A,initlambda,trace)
% initlambda ist der Startwert
% bei trace=1 werden alle Näherungswerte für lambda und p_0 protokolliert
% count ist die Anzahl der Newtonschritte
% lastp0 ist der letzte Wert des charakteristischen Polynoms
% bis auf einen Faktor ungleich null, siehe Ü10
% lambda ist der berechnete Eigenwert, x der Eigenvektor und
% resnorm die 2-Norm von (A - λI)x
```

Die obere Hessenbergmatrix A mit

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 13 - i \quad i = 1,\ldots,12 \\ a_{j+1,j} &= 12 - j, \ j = 1,\ldots,11, \\ a_{i,j} &= 13 - j, \ j = 2,\ldots,12, \ i = 1,\ldots,j-1 \end{aligned}$$

hat als grössten bzw. kleinsten Eigenwert 32.22.. bzw. 0.033.... Erproben Sie Ihr Programm nach einem Test an diesem Beispiel.