Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29.10.2007

Numerik des Matrizeneigenwertproblems
Übung 2

Präsenzübung

Ü 4 Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ beide symmetrisch. $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ erfülle

$$Q_1^T Q_1 = I .$$

Man setze

$$E_1 = AQ_1 - Q_1 S$$

und zeige: zu jedem der r Eigenwerte von S, $\lambda_1(S), \ldots, \lambda_r(S)$ gibt es einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ von A mit

$$|\lambda_i(S) - \lambda_{j(i)}(A)| \le \sqrt{2}||E_1||_2, \quad i = 1, \ldots, r .$$

Hinweis: Man ergänze Q_1 zu einem vollständigen Orthonormalsystem $Q = [Q_1, Q_2]$ und setze

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} S & O \\ O & Q_2^T A Q_2 \end{pmatrix} + E = B + E$$

wende dann Satz 1.1.7 an und schätze dann $||E||_2$ mit Hilfe der Definition der Matrixnorm ab.

Ü 5 Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beide hermitisch und $\lambda_i(A), \lambda_j(B)$ die dazugehörigen Eigenwerte mit

$$\lambda_1(A) \ge ... \ge \lambda_n(A), \qquad \lambda_1(B) \ge ... \ge \lambda_n(B).$$

Man beweise mit Hilfe des Courant'schen Minimaxprinzips die Aussage von Satz 1.1.7

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(B)| \le \rho(B - A).$$

Hinweis: Man schreibe $B = A + C$ mit $C = B - A$ und versuche mit dem Minimaxprinzip, angewendet auf $A + C$, die Ungleichung

$$\lambda_i(B) \le \lambda_i(A) + \rho(C)$$

zu zeigen. Dann vertausche man die Rollen von A und B.

Ü 6 **a)** Sei $A = \text{Blockdiag}(D_1, ..., D_N)$ eine Blockdiagonalmatrix deren Diagonalblöcke D_i quadratische Matrizen sind. Zeigen Sie: Jeder Eigenwert von A ist Eigenwert eines D_i und umgekehrt (d.h.u.a. die Vielfachheit eines mehrfach auftretenden Eigenwertes summiert sich)

b) Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

bestimme man mit Hilfe von Abschätzungen für Eigenwerte gestörter Matrizen die Eigenwerte bis auf einen Fehler von 10^{-5}.
Hinweis: Betrachten Sie mit einer Matrix B die Differenz $B - A$.

Hausübung

H 4 Sei A eine hermitische $n \times n$ Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Zeigen Sie, daß für jede Hauptuntermatrix

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ji} & \cdots & \alpha_{jj} \end{pmatrix}$$

mit $1 \leq i < j \leq n$ gilt:

a) B besitzt reelle Eigenwerte $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{j-i+1}$.

b) Es gelten die Ungleichungen $\lambda_1 \geq \mu_1$ und $\mu_{j-i+1} \geq \lambda_n$.
Hinweis: Folgern Sie die Aussagen mit Hilfe von Satz 1.1.6.

H 5 Beweisen Sie die Aussage des Satzes 1.1.8: Sei A diagonalähnlich und

$$U = (u_1, \ldots, u_n)$$

ein vollständiges Eigenvektorsystem von A. Ferner sei eine beliebige Matrix B gegeben. Dann gibt es zu jedem Eigenwert $\lambda_i(B)$ einen Eigenwert $\lambda_{j(i)}(A)$ so, daß gilt

$$|\lambda_{j(i)}(A) - \lambda_i(B)| \leq \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(U)\|B - A\|_2.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beweisskizze aus dem Skript und ersetzen Sie die $\|\cdot\|_\infty$ Norm durch die $\|\cdot\|_2$ Norm.

H 6 Die Singulärwerte einer $n \times n$-Matrix A sind definiert als Wurzeln der Eigenwerte der Matrix $A^H A$. Seien A und $\tilde{A}$ aus $\mathbb{C}^{N \times N}$ und $\sigma_i, \tilde{\sigma}_i$ die dazugehörigen Singulärwerte für $1 \leq i \leq N$. Zeigen Sie:

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \left|\left|A - \tilde{A}\right|\right|_2 \qquad 1 \leq i \leq N$$

Hinweis: Bestimmen Sie σ_i^2 mit dem Minimaxprinzip bezüglich der Matrix $A^H A$. Versuchen Sie dann mit

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_2} \leq ||A - \tilde{A}||_2 + \frac{||\tilde{A}x||_2}{||x||_2}$$

σ_i nach oben abzuschätzen, sodaß sich die geforderte Ungleichung ohne Betragstriche ergibt. Vertauschen Sie dann die Rolle von A und $\tilde{A}$.