Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
Wintersemester 2007/2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22.10.2007

# Numerik des Matrizeneigenwertproblems
# Übung 1

## Präsenzübung

**Ü 1** (*Kreisesatz von Gerschgorin*)
Beweisen Sie den **Kreisesatz von Gerschgorin**:
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und

$$\mathcal{K}_i := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\}$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_i := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|\}.$$

Ist $\lambda(A)$ ein Eigenwert von $A$, dann gilt

$$\lambda(A) \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{K}}_i\right).$$

**Hinweis:** Es gilt $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Betrachten Sie Zeile $i$ mit $|x_i| = \|x\|_\infty$.

**Ü 2** (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie mit dem Kreisesatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix $A$.

b) Transformieren Sie $A$ mit einer Diagonalmatrix $D = (1, \alpha, \alpha^2)$ und einem geeigneten $\alpha \neq 0$ so auf eine Matrix $B = D^{-1}AD$, daß der Kreis um 1 isoliert wird. Wie lautet die so erhaltene Abschätzung für den Eigenwert nahe 1?

**Ü 3** Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

**a)** Man bestimme den Eigenwert zum Eigenvektor $(1, 1, 1)^T$.

**b)** Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A - B$.

**c)** Berechnen Sie den kleinsten relativen Fehler

$$\alpha = \min \left\{ \frac{||y - x||_2}{||x||_2} : \ x = (1,1,1)^T, \ y \text{ Eigenvektor von } A - B \right\}$$

und vergleichen Sie diesen Wert mit der größtmöglichen relativen Störung des in a) errechneten Eigenwertes. Was passiert mit den Eigenwerten und Eigenvektoren von $A$ und $A - B$ für $\varepsilon \to 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

## Hausübung

**H 1** (*Verschärfung des Satzes von Gerschgorin*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Kreisesatz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix $A$.

b) Transformieren Sie $A$ mit einer Diagonalmatrix $D = (\alpha, 1, \beta)$ mit $\alpha, \beta \neq 0$ so, daß die Gerschgorin-Kreise von $B = D^{-1}AD$ voneinander getrennt sind. Welche Abschätzungen für die Eigenwerte von $A$ erhalten Sie?

c) Zeigen Sie, daß die Matrix $A$ nur reelle Eigenwerte besitzt, ohne die Eigenwerte explizit zu bestimmen.

**H 2** (*Symmetrische Matritzen*)

Zeigen Sie mit Hilfe des Kreisesatzes von Gerschgorin:

a) Eine symmetrische, strikt diagonaldominante Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

b) Eine symmetrische, invertierbare, diagonaldominante (aber nicht unbedingt strikt diagonaldominante) Matrix ist **genau dann** positiv definit, wenn alle Diagonalelemente positiv sind.

**Hinweis:** Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

**H 3** Sensitivität eines isolierten Eigenwertes

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalähnlich mit reellen Eigenwerten, $X = (x_1, ..., x_n)$ ein vollständiges Eigenvektorensystem von $A$, $Ax_i = \lambda_i x_i$ sowie $\|x_i\|_2 = 1$, $i = 1, ..., n$.
Ferner sei

$$X^{-1} =: Y = \begin{pmatrix} y_1^H \\ \vdots \\ y_n^H \end{pmatrix} \quad \text{(d.h. } y_i^H A = y_i^H \lambda_i,\ y_i \text{ sogenannter Linkseigenvektor zu } \lambda_i\text{)}.$$

$\lambda_j$ sei ein einfacher Eigenwert von $A$. Dann gilt: zu $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|F\|_2$ hinreichend klein existiert ein einfacher Eigenwert $\mu_j$ von $A + F$ mit Eigenvektor $z_j$, $\|z_j\|_2 = 1$ so, daß

$$\begin{aligned} \mu_j &= \lambda_j + \frac{y_j^H F x_j}{\|y_j^H\|_2 \|x_j\|_2} \cdot \frac{\|y_j^H\|_2 \|x_j\|_2}{y_j^H x_j} + \mathcal{O}(\|F\|_2^2) \\ z_j &= x_j + \left( \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{y_i^H F x_j}{\|y_i^H\|_2 \|x_i\|_2} \cdot \frac{\|y_i^H\|_2 \|x_i\|_2}{y_i^H x_i} \cdot \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \cdot x_i \right) + \mathcal{O}(\|F\|_2^2). \end{aligned}$$

**Hinweis:** Benutzen Sie den Hauptsatz über implizite Funktionen für das Problem $G(x, \lambda, \epsilon) = 0$ mit

$$\begin{aligned} G(x, \lambda, \epsilon) &= \begin{pmatrix} (A + \epsilon F_0)x - \lambda x \\ x^T x - 1 \end{pmatrix} \\ F &= \epsilon F_0. \end{aligned}$$

Dazu sind zunächst die Voraussetzungen zu prüfen. Dabei können sie die Matrix $A$ zur Vereinfachung der Rechnung auf Diagonalgestalt bringen (Rücktransformation nicht vergessen!).