Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11. Dezember 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 9

Präsenzübung

Ü 27 **a)** Skizzieren Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Menge $\{Ax \mid \|x\|_\infty = 1\}$.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$ mit Hilfe des Aufgabenteils a).

Hinweis: Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}$.

Ü 28 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$.

b) Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung in der Maximumnorm ab, wenn der Gauß-Algorithmus statt mit der Matrix A mit einer Matrix $\tilde{A}$ und statt mit der rechten Seite $\vec{b}$ mit dem Vektor $\tilde{\vec{b}}$ gerechnet wird und gilt:

$$\|\tilde{A} - A\|_\infty \leq 0.02 \qquad \text{und} \qquad \|\tilde{\vec{b}} - \vec{b}\|_\infty \leq 0.001.$$

c) Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems und des mit folgenden Matrizen gestörten Gleichungssystems

$$\tilde{A} - A = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\vec{b}} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie den Unterschied beider Ergebnisse mit der in b) gemachten Abschätzung.

Ü 29 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, indem Sie sie wie folgt zerlegen:
$A = D + B = D(I + D^{-1}B)$, wobei D eine Diagonalmatrix mit $d_{ii} = a_{ii}$ $(i = 1, 2, 3)$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 4.5.5

Ü 30 Gegeben sei eine Tabelle von Meßwerten:

i	1	2	3	4
t_i	1	2	3	4
y_i	1	2	2	3

Zur Approximation der "Punktwolke" (t_i, y_i) soll der Ansatz $x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ verwendet werden.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_3$ und die Matrix Φ.

b) Stellen Sie das Normalgleichungssystem auf und lösen Sie es mit einem geeigneten Verfahren.

c) Skizzieren Sie die Lösung.

d) Berechnen Sie die 2-Norm des Residuums $\vec{r}$.

Hausübung

H 27 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 1000 \\ 10^{-7} & 0.8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Spektralradius von A sowie $||A||_\infty$ und $||A||_1$. (Bem.: Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{||A\vec{x}||_\infty}{||\vec{x}||_\infty} \leq \frac{||A\vec{x}||_2}{||\vec{x}||_2} \leq \sqrt{n}\frac{||A\vec{x}||_\infty}{||\vec{x}||_\infty}$$

sodaß die Betrachtung von $||.||_2$ nichts wesentlich Neues bringt). Konstruieren Sie eine Vektornorm $||.||_T$, sodaß in der zugeordneten Matrixnorm

$$||A||_T \leq 0.95$$

gilt.

H 28 Zeigen Sie ohne Anwendung des Gauß'schen Algorithmus oder einer anderen Methode zur Berechnung von $\det(A)$, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 3 \\ 5 & 100 & -3 \\ -0.5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.
Hinweis: Zerlegen Sie $A = D_1 B D_2$, mit geeigneten invertierbaren Diagonalmatrizen D_1 und D_2.

H 29 Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungssysteme und werten Sie mit den Resultaten die Fehlerabschätzung von Satz 4.5.6 aus:

$$\frac{||\vec{x} - \tilde{\vec{x}}||}{||\vec{x}||} \lessapprox \mathrm{cond}(A)\Big(\frac{||A - \tilde{A}||}{||A||} + \frac{||\vec{b} - \tilde{\vec{b}}||}{||\vec{b}||}\Big)$$

$$A = \begin{pmatrix} 111 & 98 & 91 \\ 98 & 104 & 98 \\ 91 & 98 & 111 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

und

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 110.9764 & 97.9764 & 90.9764 \\ 98.0471 & 104.0471 & 98.0471 \\ 90.9764 & 97.9764 & 110.9764 \end{pmatrix} \quad \tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 0.6182 \\ 0.4957 \\ 0.6182 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}\tilde{\vec{x}} = \tilde{\vec{b}}$$

H 30 Lineare Ausgleichsrechnung ist auch in mehr als einer Raumdimension möglich. Im $\mathbb{R}^3$ seien folgende Punkte gegeben:

s_i	0	1	0	1
t_i	0	0	1	1
y_i	0	1	1	3

Lösen Sie das zweidimensionale Ausgleichsproblem für den linearen Ansatz

$$y(s,t) = x_1 + x_2 s + x_3 t.$$

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 9, Lösungsvorschlag

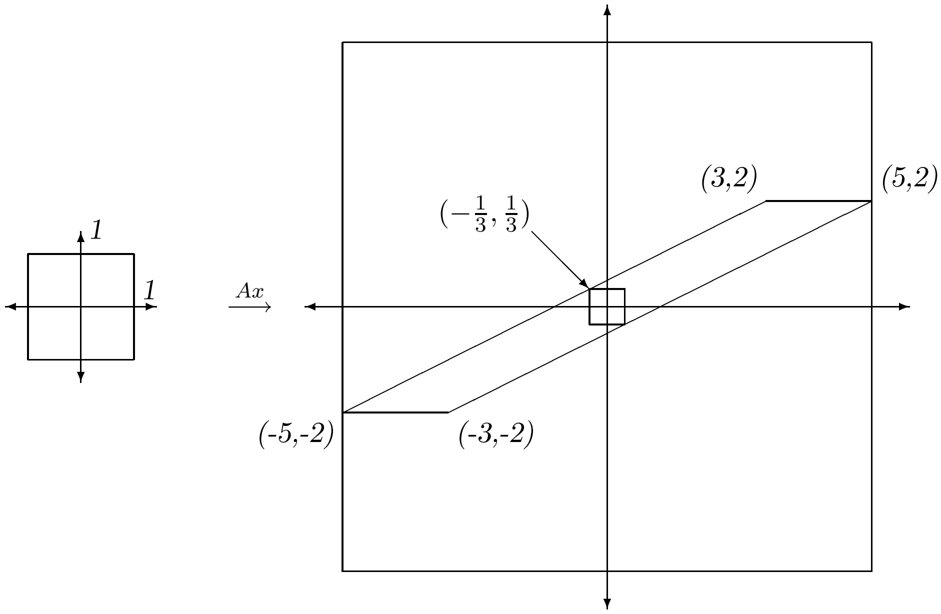
Präsenzübung

Ü 27 a) Skizzieren Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Menge $\{Ax \mid \|x\|_\infty = 1\}$.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$ mit Hilfe des Aufgabenteils a).

Hinweis: Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}$.

a)



b) *Mit dem Hinweis kommt man zu dem Zusammenhang*

$$\mathit{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}.$$

Damit ist die Konditionszahl direkt aus der Skizze ablesbar als Quotient aus der Größe der umschreibenden Sphäre und der einbeschriebenen Sphäre.

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{umschreibend:} & \{x \mid \|x\|_\infty = 5\} \\ \textit{einbeschrieben:} & \{x \mid \|x\|_\infty = \frac{1}{3}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathit{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 15.$$

Oder in anderen Worten, als der Quotient aus den ∞-Normen der Punkte mit dem größten Abstand zum Nullpunkt und dem Punkt mit dem kleinsten Abstand zum Nullpunkt, jeweils gemessen in der ∞-Norm.

Ü 28 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$.

b) Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung in der Maximumnorm ab, wenn der Gauß-Algorithmus statt mit der Matrix A mit einer Matrix $\tilde{A}$ und statt mit der rechten Seite $\vec{b}$ mit dem Vektor $\tilde{\vec{b}}$ gerechnet wird und gilt:

$$\|\tilde{A} - A\|_\infty \leq 0.02 \qquad \text{und} \qquad \|\tilde{\vec{b}} - \vec{b}\|_\infty \leq 0.001.$$

c) Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems und des mit folgenden Matrizen gestörten Gleichungssystems

$$\tilde{A} - A = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\vec{b}} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie den Unterschied beider Ergebnisse mit der in b) gemachten Abschätzung.

a) *Berechne A^{-1}: Für eine invertierbare Matrix der Form $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

also hier $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow cond_{||\cdot||_\infty}(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty = 21 \cdot 21 = 441.$

Fehlerformel anwenden:

$$\frac{||\tilde{\vec{x}} - \vec{x}||_\infty}{||\vec{x}||_\infty} \leq cond_{||\cdot||_\infty}(A) \left(\frac{||\tilde{\vec{b}} - \vec{b}||_\infty}{||\vec{b}||_\infty} + \frac{||\tilde{A} - A||_\infty}{||A||_\infty} \right) \frac{1}{1 - cond_{||\cdot||_\infty}(A) \frac{||\tilde{A}-A||_\infty}{||A||_\infty}} \leq$$

$$\leq 441 \cdot \left(\frac{0.001}{1} + \frac{0.02}{21} \right) \frac{1}{1 - 441 \cdot \frac{0.02}{21}} \leq 1.4845$$

b) *Exakte Lösung des ungestörten Problems:*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 11 & 1 \\ 9 & 10 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 11 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{array} \right)$$

$\Rightarrow x_2 = 1,\ x_1 = -1;$

Exakte Lösung des gestörten Problems:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9.99 & 11.01 & 0.999 \\ 9.01 & 9.99 & 1.001 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9.99 & 11.01 & 0.999 \\ 0 & 0.06006 & 0.1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow x = (-1.735, 1.665)^T$

Der exakte relative Fehler ist damit:

$$\frac{||\tilde{\vec{x}} - \vec{x}||_\infty}{||\vec{x}||_\infty} = 0.735$$

Die Abschätzung ist also um einen Faktor 2 zu pessimistisch.

Ü 29 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, indem Sie sie wie folgt zerlegen:
$A = D + B = D(I + D^{-1}B)$, wobei D eine Diagonalmatrix mit $d_{ii} = a_{ii}$ $(i = 1, 2, 3)$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 4.5.5

Wir zerlegen A in $A = D + B$, $d_{ii} = a_{ii}$, $i = 1, 2, 3$:

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{10} & \frac{6}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Als Matrixnorm wählen wir die Schrankennorm der $\|\cdot\|_\infty$-Norm:
$\|D^{-1}B\|_\infty = \frac{9}{10} < 1.$
Mit Satz 4.5.5 ist also $I + D^{-1}B$ invertierbar.
Wegen $A = D(I + D^{-1}B)$ ist damit auch A invertierbar.

Ü 30 Gegeben sei eine Tabelle von Meßwerten:

i	1	2	3	4
t_i	1	2	3	4
y_i	1	2	2	3

Zur Approximation der "Punktwolke" (t_i, y_i) soll der Ansatz $x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ verwendet werden.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_3$ und die Matrix Φ.
b) Stellen Sie das Normalgleichungssystem auf und lösen Sie es mit einem geeigneten Verfahren.
c) Skizzieren Sie die Lösung.
d) Berechnen Sie die 2-Norm des Residuums $\vec{r}$.

a) *Die Ansatzfunktionen lauten $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ und $\varphi_3(t) = t^2$. Demnach ergibt sich*

$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

b) *Das Normalgleichungssystem $\Phi^T \Phi x = \Phi^T y$ lautet*

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 8 \\ 23 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

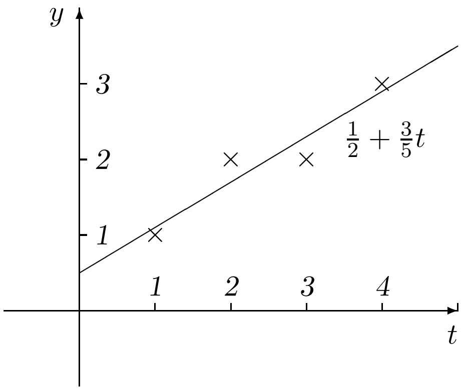
Die Lösung dieses Systems ist z.B. mit dem Cholesky-Algorithmus möglich, da die Matrix $\Phi^T \Phi$ symmetrisch und positiv definit ist. Die Zerlegung ist gegeben durch LL^T mit

$$L = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 5 & \sqrt{5} & \\ 15 & 5\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

und die Lösung lautet demnach

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) *Die Lösung ist also die Gerade* $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}t$.



d) *Die Komponenten des Residuums sind gegeben durch*

$$r_i = y_i - \sum_{j=1}^{3} x_j \varphi_j(t_i), \quad i = 1, \ldots, 4,$$

also ergibt sich

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{5}1) \\ 2 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{5}2) \\ 2 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{5}3) \\ 3 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{5}4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.3 \\ -0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{r}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Hausübung

H 27 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 1000 \\ 10^{-7} & 0.8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Spektralradius von A sowie $||A||_\infty$ und $||A||_1$. (Bem.: Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{||A\vec{x}||_\infty}{||\vec{x}||_\infty} \leq \frac{||A\vec{x}||_2}{||\vec{x}||_2} \leq \sqrt{n} \frac{||A\vec{x}||_\infty}{||\vec{x}||_\infty}$$

sodaß die Betrachtung von $||.||_2$ nichts wesentlich Neues bringt). Konstruieren Sie eine Vektornorm $||.||_T$, sodaß in der zugeordneten Matrixnorm

$$||A||_T \leq 0.95$$

gilt.

Es ist

$$\varrho(A) = .9009902 \ , \ ||A||_\infty = 1000.9 \ , \ ||A||_1 = 1000.8 \ .$$

Mit

$$||\vec{x}||_T \stackrel{def}{=} \max\{|x_1|, 10^5|x_2|\}$$

wird

$$||A||_T = ||diag(1, 10^5)Adiag(1, 10^{-5})||_\infty = \max\{0.9 + 0.1, 0.8 + 0.01\} = 0.91$$

also wird ϱ fast erreicht.

H 28 Zeigen Sie ohne Anwendung des Gauß'schen Algorithmus oder einer anderen Methode zur Berechnung von $\det(A)$, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 3 \\ 5 & 100 & -3 \\ -0.5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.
Hinweis: Zerlegen Sie $A = D_1 B D_2$, mit geeigneten invertierbaren Diagonalmatrizen D_1 und D_2.

Wir zerlegen die Matrix A zunächst entsprechend des Hinweises. Dabei muss die 100 *durch Probieren sinnvoll aufgespalten werden:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0.6 \\ 0.5 & 10 & -0.3 \\ -0.5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & -0.3 \\ -0.5 & 0.4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= D_1(I + H)D_2 \end{aligned}$$

mit $\|H\|_\infty = 0.9 < 1$. Nach Satz 4.5.5 ist also $I + H$ invertierbar. Da D_1 und D_2 ebenfalls invertierbar sind, folgt auch die Invertierbarkeit von A.

H 29 Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungssysteme und werten Sie mit den Resultaten die Fehlerabschätzung von Satz 4.5.6 aus:

$$\frac{||\vec{x}-\tilde{\vec{x}}||}{||\vec{x}||} \lesssim \operatorname{cond}(A)\Big(\frac{||A-\tilde{A}||}{||A||}+\frac{||\vec{b}-\tilde{\vec{b}}||}{||\vec{b}||}\Big)$$

$$A = \begin{pmatrix} 111 & 98 & 91 \\ 98 & 104 & 98 \\ 91 & 98 & 111 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

und

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 110.9764 & 97.9764 & 90.9764 \\ 98.0471 & 104.0471 & 98.0471 \\ 90.9764 & 97.9764 & 110.9764 \end{pmatrix} \quad \tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 0.6182 \\ 0.4957 \\ 0.6182 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}\tilde{\vec{x}} = \tilde{\vec{b}}$$

Es ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.0019 \\ 0.0019 \\ 0.0019 \end{pmatrix} \quad \tilde{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0.0088 \\ -0.0117 \\ 0.0088 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\frac{||\vec{x}-\tilde{\vec{x}}||}{||x||} = 5.0167$$

während die Fehlerabschätzung ergibt

$$\frac{||\vec{x}-\tilde{\vec{x}}||}{||\vec{x}||} \lesssim 5.0167$$

also eine perfekte Übereinstimmung: Im Extremfall ist die Abschätzung von Satz 4.5.6 scharf!

H 30 Lineare Ausgleichsrechnung ist auch in mehr als einer Raumdimension möglich. Im $\mathbb{R}^3$ seien folgende Punkte gegeben:

s_i	0	1	0	1
t_i	0	0	1	1
y_i	0	1	1	3

Lösen Sie das zweidimensionale Ausgleichsproblem für den linearen Ansatz

$$y(s,t) = x_1 + x_2 s + x_3 t.$$

Die Ansatzfunktion ist eine Ebene und läßt sich zerlegen in die Ansätze

$$\varphi_1(s,t) = 1, \quad \varphi_2(s,t) = s \quad \text{und} \quad \varphi_3(s,t) = t.$$

Die Matrix Φ lautet damit

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Normalgleichungen sind ($\Phi^T \Phi x = \Phi^T y$)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Als Lösung ergibt sich $x = (-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})^T$. *Die Fehlerquadratsumme in der Lösung ist* 0.25.