Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20. November 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 6

Präsenzübung

Ü 17 Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' \;=\; y + t + 1\;, \quad y(0) \;=\; -1$$

mit dem expliziten Eulerverfahren, dem Verfahren von Heun der Ordnung 2 und dem klassischen vierstufigen Rungekuttaverfahren der Ordnung 4 an der Stelle $t \;=\; h \;=\; 0.2$.

Ü 18 **Runge-Kutta.** Gegeben sei das Koeffizientenschema eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

a) Welche Formel erhält man für y_1, wenn man das dadurch definierte Verfahren auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \qquad y(0) = 1$$

anwendet?

b) Mit welcher Potenz in h geht der Fehler $y_1 - y(h)$ gegen 0, wenn $h \to 0$? Wie groß wird demnach die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens sein?

Ü 19 Gegeben sei ein explizites Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_i(t_j, h) &= f(t_j + \alpha_i h, y_j + h \cdot \sum_{l=1}^{m} \beta_{il} k_l(t_j, h)), \qquad i = 1, \ldots, m \\ y_{j+1} &= y_j + h \cdot \sum_{i=1}^{m} \gamma_i k_i(t_j, h). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$$

das Verfahren die Konsistenzordnung 1 hat.

Hinweis: Es ist $f(t + \alpha h, y + h \cdot k(t, h)) \;=\; f(t, y) + O(h)$, falls $f(t, y)$ eine differenzierbare Funktion von t und y ist.

Hausübung

H 17 Zeigen Sie, daß die durch die Verfahrensfunktion

$$\Phi(t,y;h,f) = (1-c)f(t,y) + cf\left(t + \frac{h}{2c}, y + \frac{h}{2c}f(t,y)\right) \quad , \quad c \neq 0$$

definierte Klasse von Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt.

H 18 **Runge-Kutta-Verfahren im** $\mathbb{R}^2$
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie einen Schritt des klassischen Runge–Kutta–Verfahrens, um Näherungen für $y_1(0.1)$ und $y_2(0.1)$ zu berechnen. Die Schrittweite ist $h = 0.1$.

H 19 Gegeben sei ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2,3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \tilde{\gamma}_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} k_1 & = & f(t,y) \\ k_2 & = & f(t+h, y+hk_1) \\ k_3 & = & f(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{4}(k_1+k_2)) \\ \Phi_1 & = & \frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ \Phi_2 & = & \frac{1}{6}(k_1+k_2+4k_3) \end{array} \right.$$

und die homogene lineare autonome DGL $y' = \lambda y$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$. Rechnen Sie formal je einen Schritt mit beiden Verfahren mit der Schrittweite h. Wie lautet der Abschneidefehler der beiden Verfahren? Wie lautet die Differenz

$$h(\Phi_2(0,1,h;f) - \Phi_1(0,1,h;f))$$

Welche Anwendung sehen Sie in dieser Konstruktion?

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 6, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 17 Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = y + t + 1\ , \quad y(0) = -1$$

mit dem expliziten Eulerverfahren, dem Verfahren von Heun der Ordnung 2 und dem klassischen vierstufigen Rungekuttaverfahren der Ordnung 4 an der Stelle $t = h = 0.2$.

```
f=inline('y+t+1','t','y');
y0=-1;
t0=0;
h=0.2;
y1eul=y0+h*f(t0,y0);
y1heun=y0+(h/2)*(f(t0,y0)+f(t0+h,y1eul));
k1=f(t0,y0);
k2=f(t0+h/2,y0+h/2*k1);
k3=f(t0+h/2,y0+h/2*k2);
k4=f(t0+h,y0+h*k3);
y1rk4=y0+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
yex=exp(0.2)-0.2-2;
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
Zwischengroessen:
 f(t0,y0)      = 0
 f(t0+h,y1eul) = 0.2
  k1  k2                  k3                  k4
  0   0.10000000000000    0.11000000000000    0.2220000000000
Resultate:
   yexakt           euler              heun               rk4
-0.97859724183983 -1.00000000000000 -0.98000000000000 -0.97860000000000
Fehler:
                   0.02140275816017   0.00140275816017   0.00000275816017
```

Ü 18 **Runge-Kutta.** Gegeben sei das Koeffizientenschema eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

a) Welche Formel erhält man für y_1, wenn man das dadurch definierte Verfahren auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \qquad y(0) = 1$$

anwendet?

b) Mit welcher Potenz in h geht der Fehler $y_1 - y(h)$ gegen 0, wenn $h \to 0$? Wie groß wird demnach die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens sein?

a) *Man erhält aus dem Koeffizientenschema:*

$$
\begin{aligned}
k_1(t,y,h) &= \lambda y \\
k_2(t,y,h) &= \lambda\Big(y+\frac{h}{2}k_1\Big) = \Big(\lambda+\frac{h}{2}\lambda^2\Big)y \\
k_3(t,y,h) &= \lambda\Big(y+\frac{h}{4}k_1+\frac{3h}{4}k_2\Big) = \Big(\lambda+h\lambda^2+\frac{3h^2}{8}\lambda^3\Big)y \\
y_1 &= y_0 + h\Big(\frac{1}{5}k_1(0,y_0,h)+\frac{3}{5}k_2(0,y_0,h)+\frac{1}{5}k_3(0,y_0,h)\Big) \\
&= 1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2+\frac{3}{40}(h\lambda)^3.
\end{aligned}
$$

b) *Die exakte Lösung des Anfangswertproblem ist $y(t)=e^{\lambda t}$. Damit erhält man*

$$
y_1 - y(h) = \Big(1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2+\frac{3}{40}(h\lambda)^3-e^{\lambda h}\Big)
$$

Die ersten drei Terme $1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2$ stimmen mit dem Anfang der Exponentialreihe überein. Aus der Abschätzung des Restgliedes der Taylorreihe ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\left|1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2-e^{\lambda h}\right| &= \left|\frac{\lambda^3 e^{\lambda\xi}}{3!}h^3\right|, \qquad \xi\in[0,h] \\
&\le Ch^3
\end{aligned}
$$

Damit erhält man

$$
|y_1-y(h)| \le \Big(C+\frac{3}{40}\Big)h^3 = C'h^3.
$$

Man erhält damit für den lokalen Abschneidefehler

$$
|\rho(h,1,0)| = \frac{|y(h)-y_1|}{h} \le Ch^2.
$$

Es liegt somit die Vermutung nahe, dass das Verfahren eine Konsistenzordnung von 2 hat. (Dies ist auch der Fall.)

Ü 19 Gegeben sei ein explizites Runge-Kutta-Verfahren

$$
\begin{aligned}
k_i(t_j,h) &= f(t_j+\alpha_i h, y_j + h\cdot\sum_{l=1}^{m}\beta_{il}k_l(t_j,h)), \qquad i=1,\dots,m \\
y_{j+1} &= y_j + h\cdot\sum_{i=1}^{m}\gamma_i k_i(t_j,h).
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung

$$
\sum_{j=1}^{m}\gamma_j = 1
$$

das Verfahren die Konsistenzordnung 1 hat.

Hinweis: Es ist $f(t+\alpha h, y+h\cdot k(t,h)) = f(t,y)+O(h)$, falls $f(t,y)$ eine differenzierbare Funktion von t und y ist.

Wir müssen zeigen, dass

$$\|\rho(h,z,t)\| \quad \leq \quad C \cdot h$$

gilt. Dabei ist

$$\rho(h,z,t) \quad = \quad \frac{y(t+h)-z}{h} - \Phi(t,z,h)$$

und y die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(\tau) = f(\tau, y(\tau)), \quad y(t) = z.$$

Eine Entwicklung von $y(t+h)$ um t liefert

$$y(t+h) \quad = \quad y(t) + hy'(t) + O(h^2) = z + hf(t,z) + O(h^2).(*)$$

Nutzen wir nun die im Hinweis angegebene Entwicklung von $f(t+\alpha h, y+hk)$, so erhalten wir

$$k_i(t,h) = f(t+\alpha_i h, z + h \cdot \sum_{l=1}^{m} \beta_{il} k_l(t,h)) = f(t,z) + O(h).$$

Dies liefert uns für die Verfahrensfunktion $\Phi(t,z,h)$:

$$\begin{aligned} \Phi(t,z,h) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{m} \gamma_i k_i(t,h) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i f(t,z) + O(h) \\ &= \quad f(t,z) + O(h). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Entwicklung (*)

$$\rho(h,z,t) \quad = \quad f(t,z) + O(h) - f(t,z) + O(h) = O(h)$$

und damit die Behauptung.

Hausübung

H 17 Zeigen Sie, daß die durch die Verfahrensfunktion

$$\Phi(t,y;h,f) = (1-c)f(t,y) + cf\left(t + \frac{h}{2c}, y + \frac{h}{2c}f(t,y)\right) \quad , \quad c \neq 0$$

definierte Klasse von Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt.

Der Abbruchfehler ist

$$\rho(h,y(t),t) = \frac{y(t+h)-y(t)}{h} - \Phi(t,y(t);h,f)$$

Durch Taylorentwicklung ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
\frac{y(t+h)-y(t)}{h} &= f(t,y(t)) + \frac{h}{2}\left[f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t))f(t,y(t))\right] + \mathcal{O}(h^2) \\
f\left(t + \frac{h}{2c}, y + \frac{h}{2c}f(t,y)\right) &= f(t,y(t)) + \frac{h}{2c}\left[f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t))f(t,y(t))\right] + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Damit der Abbruchfehler:

$$\begin{aligned}
\rho(h,y(t),t) &= f(t,y(t)) + \frac{h}{2}\left[f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t))f(t,y(t))\right] - (1-c)f(t,y) \\
&\quad -c\left[f(t,y(t)) + \frac{h}{2c}\left[f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t))f(t,y(t))\right]\right] + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Damit ist die Konsistenz- und Konvergenzordnung gleich 2.

H 18 Runge-Kutta-Verfahren im $\mathbb{R}^2$
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie einen Schritt des klassischen Runge–Kutta–Verfahrens, um Näherungen für $y_1(0.1)$ und $y_2(0.1)$ zu berechnen. Die Schrittweite ist $h = 0.1$.

Es gilt

$$f(t,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \\ 4y_1 - 2ty_2 \end{pmatrix}.$$

Die einzelnen Schritte des RK-Verfahrens lauten:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(0, 0.2, 0.5) &&= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.8 \end{pmatrix} \\
k_2 &= f(0.05, 0.225, 0.54) &&= \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.846 \end{pmatrix} \\
k_3 &= f(0.05, 0.227, 0.5423) &&= \begin{pmatrix} 0.5423 \\ 0.85377 \end{pmatrix} \\
k_4 &= f(0.1, 0.25423, 0.585377) &&= \begin{pmatrix} 0.585377 \\ 0.8998446 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \end{pmatrix} &= y^0 + \frac{1}{60}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) &&= \begin{pmatrix} 0.25416628 \\ 0.58498974 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

H 19 Gegeben sei ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2,3

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
\hline
\gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\tilde{\gamma}_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\left\{ \begin{aligned}
k_1 &= f(t, y) \\
k_2 &= f(t + h, y + hk_1) \\
k_3 &= f(t + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{h}{4}(k_1 + k_2)) \\
\Phi_1 &= \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \\
\Phi_2 &= \tfrac{1}{6}(k_1 + k_2 + 4k_3)
\end{aligned} \right.$$

und die homogene lineare autonome DGL $y' = \lambda y$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$. Rechnen Sie formal je einen Schritt mit beiden Verfahren mit der Schrittweite h. Wie lautet der Abschneidefehler der beiden Verfahren? Wie lautet die Differenz

$$h(\Phi_2(0, 1, h; f) - \Phi_1(0, 1, h; f))$$

Welche Anwendung sehen Sie in dieser Konstruktion?

Für Φ_1, das ist das 1. Verfahren von Heun, erhalten wir

$$y_1^h = 1 + (h/2)(\lambda + \lambda(1 + h\lambda)) = 1 + h\lambda + (h\lambda)^2/2$$

also den Anfang der Taylorentwicklung von $\exp(h\lambda)$ mit einem Abbruchfehler von $\mathcal{O}(h^3)$, d.h. der Abschneidefehler ρ ist

$$\rho_1(h, y(t), t) = (h^2/6) \cdot y'''(t) + \mathcal{O}(h^3) \ .$$

Für Φ_2 ergibt sich

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lambda \\
k_2 &= \lambda + h\lambda^2 \\
k_3 &= \lambda + \lambda \cdot h/4 \cdot (2\lambda + h\lambda^2) \\
y_1^h &= 1 + (h/6)(6\lambda + 3h\lambda^2 + h^2\lambda^3) \\
&= 1 + h\lambda + (h\lambda)^2/2 + (h\lambda)^3/6
\end{aligned}$$

also der Anfang der Taylorentwicklung von $\exp(h\lambda)$ *bis zur dritten Potenz einschliesslich mit einem Abbruchfehler von*

$$\frac{1}{24}y^{(4)}(t) + \mathcal{O}(h^5)$$

und die Differenz

$$h(\Phi_2(0,1,h;f) - \Phi_1(0,1,h;f))$$

also zu

$$(h\lambda)^3/6 \;=\; h\rho_1(h,y(t),t) + \mathcal{O}(h^4)$$

nach Division durch h *also eine grössenordnungsmässig korrekte Schätzung von* ρ_1. *Dies eröffnet die Möglichkeit zu einer Fehlerschätzung aus berechneten Werten, die in der Schrittweitensteuerung benutzt wird.*