Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13. November 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 5

Präsenzübung

Ü 14 Gauß-Quadratur

Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t$$

näherungsweise mit der 3-Punkt Gauß-Quadratur-Formel und schätzen Sie den Quadraturfehler ab.

Hinweis: $\left| \frac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}t^6} \frac{e^t}{t} \right| \leq 190$ für $t \in [2,3]$.

Ü 15 (**Doppelintegrale**)

Doppelintegrale lassen sich oft durch Hintereinanderausführen zweier einfacher Integrationen bestimmen. Gesucht sind die Gewichte ω_{ij} von

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x \approx \frac{h_x h_y}{4} \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} \omega_{ij} f(x_i, y_j),$$

$x_i = a + ih_x,\ y_j = c + jh_y,\ h_x = \frac{b-a}{n_x},\ h_y = \frac{d-c}{n_y}$.
Dabei soll zur Bestimmung von

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad I = \int_a^b F(x)\ \mathrm{d}x$$

die zusammengesetzte Trapezregel benutzt werden.

Ü 16 (**Schwerpunktregel**)

Wir betrachten das Dreieck T mit den Eckpunkten (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k). Gesucht ist eine Quadraturformel der Form

$$\int_T f(x,y)\mathrm{d}(x,y) \approx w_0 f(x_0, y_0).$$

Bestimmen Sie den Knoten (x_0, y_0) und das Gewicht w_0 so, daß die Quadraturformel für affinlineare Funktionen exakt ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst den Knoten und das Gewicht für das Standarddreieck mit den Ecken (0,0), (1,0), (0,1). Zur Auswertung des allgemeinen Falls benutzen Sie die Transformation auf das Standarddreieck.

Hausübung

H 14 Bereichsintegrale. Es sei der Bereich

$$B = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

gegeben. Wieviele Funktionsauswertungen werden mindestens benötigt um eine lineare Funktion $f(x,y) = a + bx + cy$ exakt über dem Bereich B zu integrieren? Geben Sie die Knoten und die Gewichte der entsprechenden Quadraturformel an.

Hinweis: Schreiben Sie das Integral als ein Doppelintegral und verwenden Sie für beide Integrale die Gauß-Quadratur.

H 15 (**Transformation auf das Standarddreieck, Formel von Collatz und Albrecht**)
Verwenden Sie die Formel von Collatz und Albrecht

$$\int_{T_0} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{1}{60}\left[f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},0) + f(0,\frac{1}{2})\right] + \frac{9}{60}\left[f(\frac{1}{6},\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{6},\frac{4}{6}) + f(\frac{4}{6},\frac{1}{6})\right]$$

um die Funktion $f(x,y) = x^3+y^3+x^2y+xy^2$ auf dem Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,1),\ (3,0)$ und $(4,4)$ zu integrieren.

H 16 Adaptive Quadratur Als Integrator für eine adaptive Quadratur soll im Folgenden die Simpsonregel benutzt werden. Das Ziel soll die Bestimmung von

$$\int_{1/2}^{1} \tan(x)\mathrm{d}x$$

mit einem Fehler von höchstens $\delta = 10^{-6}$ sein. Als erste Versuchsschrittweite werde jedoch nicht $1/2$, sondern $\tilde{H}_0 = 0.2$ benutzt. Führen Sie das Verfahren aus bis das erste Teilintervall akzeptiert wird. Im Falle des Verwerfens mit $\kappa < 1$ soll nach Möglichkeit $\tilde{H}_0$ halbiert werden, um wenigstens 3 alte Funktionswerte noch einmal benutzen zu können.

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 5, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 14 Gauß-Quadratur

Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t$$

näherungsweise mit der 3-Punkt Gauß-Quadratur-Formel und schätzen Sie den Quadraturfehler ab.
Hinweis: $\left|\frac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}t^6}\frac{e^t}{t}\right| \leq 190$ für $t \in [2,3]$.

Die Gauß-Quadraturformel lautet in der allgemeinen Form

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n} \beta_k^{(n)} f(\bar{x}_k^{(n)}) \quad mit \quad \bar{x}_k^{(n)} = \frac{b-a}{2}x_k^{(n)} + \frac{b+a}{2}.$$

In folgender Tabelle sind die Nullstellen des Legendre-Polynoms $x_k^{(2)}$, die transformierten Stützstellen $\bar{x}_k^{(2)}$, die Gewichte $\beta_k^{(2)}$, die Punktauswertungen von f und die Produkte $\beta_k^{(2)} f(\bar{x}_k^{(2)})$ angegeben.

k	$x_k^{(2)}$	$\bar{x}_k^{(2)}$	$\beta_k^{(2)}$	$f(\bar{x}_k^{(2)})$	$\beta_k^{(2)} f(\bar{x}_k^{(2)})$
0	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	2.112702	0.5555556	3.914682	2.174823
1	0	2.5	0.8888889	4.872998	4.331553
2	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	2.887298	0.5555556	6.215071	3.452817
				$\frac{1}{2}\Sigma =$	4.979597

Die exakte Darstellung des Integrals ist

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t}dt = \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n} \beta_k^{(n)} f(\bar{x}_k^{(n)}) + \left(\frac{d^6}{dt^6}\frac{e^t}{t}\right)_{t=\xi} \frac{(3!)^4}{7(6!)^3}.$$

Mit dem Hinweis ergibt sich dann eine Fehlerabschätzung von

$$\left|\int_2^3 \frac{e^t}{t}dt - 4.979597\right| \leq 190\frac{(3!)^4}{7(6!)^3} = 9.42 \cdot 10^{-5}.$$

Ü 15 (Doppelintegrale)

Doppelintegrale lassen sich oft durch Hintereinanderausführen zweier einfacher Integrationen bestimmen. Gesucht sind die Gewichte ω_{ij} von

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x \approx \frac{h_x h_y}{4}\sum_{i=0}^{n_x}\sum_{j=0}^{n_y} \omega_{ij} f(x_i, y_j),$$

$x_i = a + ih_x,\ y_j = c + jh_y,\ h_x = \frac{b-a}{n_x},\ h_y = \frac{d-c}{n_y}$.
Dabei soll zur Bestimmung von

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad I = \int_a^b F(x)\ \mathrm{d}x$$

die zusammengesetzte Trapezregel benutzt werden.

Bestimmung von $F(x)$ mit der summierten Trapezregel:

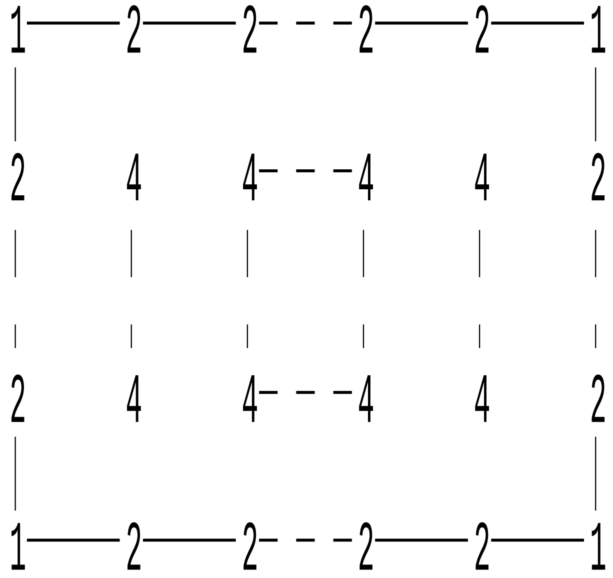
$$F(x) \;=\; \int_c^d f(x,y)\ dy \approx \frac{h_y}{2}\left[f(x,c) + 2\sum_{j=1}^{n_y-1} f(x,y_j) + f(x,d)\right].$$

Bestimmung von I mit der summierten Trapezregel:

$$\begin{aligned}
I \;&=\; \int_a^b F(x)\ dx \approx \frac{h_x}{2}\left[F(a) + 2\sum_{i=1}^{n_x-1} F(x_i) + F(b)\right] \\
&\approx \frac{h_x}{2}\Bigg[\frac{h_y}{2}\underbrace{\left(f(a,c) + 2\sum_{j=1}^{n_y-1} f(a,y_j) + f(a,d)\right)}_{F(a)} \\
&\qquad +2\sum_{i=1}^{n_x-1}\frac{h_y}{2}\underbrace{\left(f(x_i,c) + 2\sum_{j=1}^{n_y-1} f(x_i,y_j) + f(x_i,d)\right)}_{F(x_i)} \\
&\qquad + \frac{h_y}{2}\underbrace{\left(f(b,c) + 2\sum_{j=1}^{n_y-1} f(b,y_j) + f(b,d)\right)}_{F(b)}\Bigg] \\
&= \frac{h_x h_y}{4}\Bigg[f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d) + 4\sum_{i=1}^{n_x-1}\sum_{j=1}^{n_y-1} f(x_i,y_j) \\
&\qquad +2\left(\sum_{j=1}^{n_y-1} f(a,y_j) + \sum_{j=1}^{n_y-1} f(b,y_j) + \sum_{i=1}^{n_x-1} f(x_i,c) + \sum_{i=1}^{n_x-1} f(x_i,d)\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir ($i = 1,\ldots,n_x-1, j = 1,\ldots,n_y-1$):

$\omega_{00} = \omega_{01} = \omega_{10} = \omega_{11} = 1$ *(Eckknoten),*
$\omega_{0j} = \omega_{1j} = \omega_{i0} = \omega_{i1} = 2$ *(Randknoten),*
$\omega_{ij} = 4$ *(Innere Knoten).*



Ü 16 (**Schwerpunktregel**)

Wir betrachten das Dreieck T mit den Eckpunkten (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k). Gesucht ist eine Quadraturformel der Form

$$\int_T f(x,y)\mathrm{d}(x,y) \approx w_0 f(x_0, y_0).$$

Bestimmen Sie den Knoten (x_0, y_0) und das Gewicht w_0 so, daß die Quadraturformel für affin-lineare Funktionen exakt ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst den Knoten und das Gewicht für das Standarddreieck mit den Ecken (0,0), (1,0), (0,1). Zur Auswertung des allgemeinen Falls benutzen Sie die Transformation auf das Standarddreieck.

Wir rechnen auf dem Einheitsdreick T_0 mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ und transformieren das Ergebnis mit Hilfe der Transformationsformel auf das Dreieck T. Wir setzen die Basisfunktionen 1, x, y ein und erhalten

$$\int_{T_0} 1 \; d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 \; dy dx = \frac{1}{2} = w_0$$

$$\int_{T_0} x \; d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} x \; dy dx = \frac{1}{6} = w_0 x_0$$

$$\int_{T_0} y \; d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} y \; dy dx = \frac{1}{6} = w_0 y_0$$

Dies ergibt $w_0 = \frac{1}{2}$ und $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Anwendung der Transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + A_T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \textit{mit} \quad A_T = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix}$$

ergibt

$$\int_T f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{T_0} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))|\det(A_T)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$
$$\approx |T| f\left(\frac{1}{3}(x_i + x_j + x_k), \frac{1}{3}(y_i + y_j + y_k)\right).$$

Dabei ist $|T|$ *der Flächeninhalt von* T.

Hausübung

H 14 Bereichsintegrale. Es sei der Bereich

$$B = \{(x,y) : -1 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1 - x^2\}$$

gegeben. Wieviele Funktionsauswertungen werden mindestens benötigt um eine lineare Funktion $f(x,y) = a + bx + cy$ exakt über dem Bereich B zu integrieren? Geben Sie die Knoten und die Gewichte der entsprechenden Quadraturformel an.

Hinweis: Schreiben Sie das Integral als ein Doppelintegral und verwenden Sie für beide Integrale die Gauß-Quadratur.

Die Aufteilung in ein Doppelintegral ergibt

$$\int_B f(x,y)\ d(x,y) = \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} f(x,y)\ dy dx.$$

Das innere Integral ist ein Integral über eine lineare Funktion in y. Damit ist in y-Richtung ein Knoten in der Intervallmitte $\frac{b+a}{2} = \frac{1-x^2}{2}$ nötig um das Integral exakt zu bestimmen. Das zugehörige Gewicht lautet $b - a = 1 - x^2$.

Durch diese exakte Integration ist das äußere Integral

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{(1 - x^2) \cdot f\left(x, \frac{1 - x^2}{2}\right)}_{F(x)} dx\ .$$

Der Integrand $F(x)$ ist ein Polynom 4. Grades in x und wird folglich durch 3 Knoten in x-Richtung bei $-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}$ exakt integriert. Die Gewichte lauten $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$.

Durch Anwendung der Gauß-Quadratur auf F ergibt sich nach Einsetzen von f die Quadraturformel:

$$\int_{-1}^{1} F(x)dx = \frac{5}{9}F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}F(0) + \frac{5}{9}F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) =$$

$$= \frac{5}{9}\left(1 - \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2\right) f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1 - \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}{2}\right) + \frac{8}{9} f\left(0, \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{5}{9}\left(1 - \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2\right) f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1}{5}\right) + \frac{8}{9} f\left(0, \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1}{5}\right)$$

H 15 (Transformation auf das Standarddreieck, Formel von Collatz und Albrecht)
Verwenden Sie die Formel von Collatz und Albrecht

$$\int_{T_0} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{1}{60}\left[f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 0) + f(0, \frac{1}{2})\right] + \frac{9}{60}\left[f(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}) + f(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}) + f(\frac{4}{6}, \frac{1}{6})\right]$$

um die Funktion $f(x,y) = x^3+y^3+x^2y+xy^2$ auf dem Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,1)$, $(3,0)$ und $(4,4)$ zu integrieren.

Man bestimmt zuerst eine affine Transformation $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Standarddreieck T_0 auf das gegebene Dreieck T abbbildet. Wir setzen dabei $\Phi : T_0 \to T$ als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + A_T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

an. Dann gilt

$$\int_T f(x,y)\ dxdy = \int_{T_0} f(\Phi(\xi,\eta))\ \det(A_T)\ d\xi d\eta.$$

Man fordert

$$\Phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \Phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und erhält daraus für x_1, y_1 und die Matrix A_T

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad A_T = \begin{pmatrix} 3-0 & 4-0 \\ 0-1 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von A_T ist

$$\det(A_T) = 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 13.$$

Damit erhält man

$$\int_T f(x,y)\ dxdy = \int_{T_0} f(\Phi(\xi,\eta))\ \det(A_T)\ d\xi d\eta.$$

Jetzt kann die Formel von Collatz und Albrecht angewendet werden:

$$\begin{aligned}
\int_T f(x,y)\ dxdy &= \int_{T_0} f(\Phi(\xi,\eta))\ \det(A_T)\ d\xi d\eta = 13\int_{T_0} f(\Phi(\xi,\eta))\ d\xi d\eta \\
&\approx 13 \cdot \frac{1}{60}\left[f(\Phi(\frac{1}{2},\frac{1}{2})) + f(\Phi(\frac{1}{2},0)) + f(\Phi(0,\frac{1}{2}))\right] \\
&\quad +13 \cdot \frac{9}{60}\left[f(\Phi(\frac{1}{6},\frac{1}{6})) + f(\Phi(\frac{1}{6},\frac{4}{6})) + f(\Phi(\frac{4}{6},\frac{1}{6}))\right] \\
&= \frac{13}{60}\left[f(\frac{7}{2},2) + f(\frac{3}{2},\frac{1}{2}) + f(2,\frac{5}{2})\right] \\
&\quad +\frac{117}{60}\left[f(\frac{7}{6},\frac{4}{3}) + f(\frac{19}{6},\frac{17}{6}) + f(\frac{8}{3},\frac{5}{6})\right] \\
&= \frac{13}{60}\left[\frac{715}{8} + 5 + \frac{369}{8}\right] + \frac{117}{60}\left[\frac{1695}{216} + \frac{325}{3} + \frac{5901}{216}\right] \\
&= \frac{4564}{15} \approx 310.2667.
\end{aligned}$$

H 16 Adaptive Quadratur Als Integrator für eine adaptive Quadratur soll im Folgenden die Simpsonregel benutzt werden. Das Ziel soll die Bestimmung von

$$\int_{1/2}^{1} \tan(x)\mathrm{d}x$$

mit einem Fehler von höchstens $\delta = 10^{-6}$ sein. Als erste Versuchsschrittweite werde jedoch nicht $1/2$, sondern $\tilde{H}_0 = 0.2$ benutzt. Führen Sie das Verfahren aus bis das erste Teilintervall akzeptiert wird. Im Falle des Verwerfens mit $\kappa < 1$ soll nach Möglichkeit $\tilde{H}_0$ halbiert werden, um wenigstens 3 alte Funktionswerte noch einmal benutzen zu können.

Die Formel für I_0 lautet

$$I_0 = \frac{\tilde{H}_0}{6}\Big(f(x_0) + 4f(x_0 + \tilde{H}_0/2) + f(x_0 + \tilde{H}_0)\Big)$$

und die für I_1

$$I_1 = \frac{\tilde{H}_0}{12}\Big(f(x_0) + 4f(x_0 + \tilde{H}_0/4) + 2f(x_0 + \tilde{H}_0/2) + 4f(x_0 + 3\tilde{H}_0/4) + f(x_0 + \tilde{H}_0)\Big)$$

Die Formel für den Testkoeffizienten κ ist wegen Ordnung=4

$$\kappa = \left(\frac{\delta \tilde{H}_0 \frac{15}{16}}{(b-a)|I_1 - I_0|}\right)^{\frac{1}{4}} .$$

und mit $b - a = 0.5$ ergibt sich aus dem Datensatz

$$\begin{aligned}
x &= [0.5000, 0.5250, 0.5500, 0.5750, 0.6000, 0.6250, 0.6500, 0.6750, 0.7000] \\
y &= [0.54630248984379, 0.57922008228937, 0.61310521328814, 0.64804549459635, \\
&\quad 0.68413680834169, 0.72148444099090, 0.76020439913368, 0.80042494283068, \\
&\quad 0.84228838046308] \\
I_0 &= (0.2/6)\cdot(y(1) + 4y(5) + y(9)) \;=\; 0.13750460345579 \\
I_1 &= (0.2/12)\cdot(y(1) + 4y(3) + 2y(5) + 4y(7) + y(9)) \;=\; 0.13750171561129 \\
\kappa &= (10^{-6}\cdot(0.2\cdot 15/16)/(0.5|I1 - I0|))^{1/4} \;=\; 0.60029450234134
\end{aligned}$$

und nach Schrittweitenhalbierung

$$\begin{aligned}
I_0 &= (0.1/6)\cdot(y(1) + 4y(3) + y(5)) \;=\; 0.06138100252230 \\
I_1 &= (0.1/12)\cdot(y(1) + 4y(2) + 2y(3) + 4y(4) + y(5)) \;=\; 0.06138093360254 \\
\kappa &= (10^{-6}\cdot(0.1\cdot(15/16))/(0.5|I1 - I0|))^{1/4} \;=\; 1.28429376989773
\end{aligned}$$

Dieser Teilschritt wird also nun akzeptiert.