Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. November 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 4

Präsenzübung

Ü 10 Bestimmen Sie die genaue Ordnung der Quadraturformel

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \frac{b-a}{10}\Big(f(a)+4f(a+(b-a)/3)+4f(a+2(b-a)/3)+f(b)\Big)\ .$$

Ü 11 (*Rechteckregel*)
Eine andere Klasse von Quadraturformeln ergibt sich, wenn man die Knoten frei variieren lässt. Bei einem einzigen Knoten ergibt sich die Formel

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)\omega_0 f(x_0).$$

a) Bestimmen Sie die Werte für ω_0 und x_0 so, daß die Quadraturformel von der Ordnung mindestens 2 ist. Betrachten Sie zuerst den Speziallfall $a=0,\ b=1$ und bestimmen Sie anschließend die Formel für den Allgemeinfall.
b) Zeigen Sie, daß die in a) erhaltene Rechteckregel von der Ordnung genau 2 ist.

Ü 12 (*Quadraturformel, Ordnung*)
Folgende Quadraturformel soll hergeleitet werden:

$$\int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)\ dx \approx \omega_0 f(-1)+\omega_1 f(0)+\omega_2 f(1).$$

Bestimmen Sie die Werte für $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ so, daß die Quadraturformel von der Ordnung mindestens 3 ist.

Ü 13 **Riemann-Summe.**
Sei $f \in C[a,b]$ beliebig mit $x_i = a+ih$, $i=0,\dots,n$, $h=(b-a)/n$ und sei

$$M(h)=\frac{h}{8}\sum_{i=0}^{n-1}\left(3f(x_i+\frac{h}{6})+2f(x_i+\frac{h}{2})+3f(x_i+\frac{5h}{6})\right).$$

Um die Konvergenz dieser Formel für $h \to 0$ für beliebiges nur stetiges f zu zeigen, muss man die Formel als Riemannsumme schreiben, also ein Gitter $z_0=a,\dots,z_{N(h)}=b$ erzeugen, sodaß jeder Knoten genau in ein Teilintervall $[z_i, z_{i+1}]$ fällt. Welche Rolle spielen also hier die Gewichte?

Zeigen Sie

$$\lim_{h\to 0} M(h) = \int_a^b f(t)dt.$$

Hinweis: Interpretieren Sie die Formel als Riemann-Summe.

Hausübung

H 10 Quadratur eines Splines

Sei $\mathcal{Z} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a, b]$. Ein kubischer Spline auf dieser Zerlegung soll mit der zusammmengesetzten Simpsonregel exakt integriert werden. Wie müssen die Teilintervalle gewählt werden, wenn man möglichst wenig Splineauswertungen haben möchte? Bedenken Sie, daß die Simpsonregel kubische Polynome exakt integriert, aber ein Spline kein Polynom vom Grad drei ist!

H 11 Quadraturformel.

Man zeige: Es gibt keine $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ und t_1 so, daß die Näherungsformel

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(1)$$

für alle $f \in \Pi_4$ exakt wird. Gibt es eine Formel dieses Typs, die für $f \in \Pi_3$ exakt ist?

H 12 Konstruieren Sie eine Quadraturformel des Typs

$$\int_0^{3h} f(x)\mathrm{d}x \ = \ Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

von möglichst hoher Ordnung. Wozu könnte eine solche Formel nützlich sein? Denken Sie an

$$y(3h) \ = \ y(0) + \int_0^{3h} f(z, y(z))\mathrm{d}z$$

für eine gewöhnliche DGL

$$y' \ = \ f(x, y(x)) \ , \quad y(0) \ = \ y_0$$

H 13 Das Restglied der summierten Simpsonregel $S(h)$ kann auch geschrieben werden als

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ - \ S(h) \ = \ -\frac{h^4}{180} \int_a^b f^{(4)}(x)\mathrm{d}x + \mathcal{O}(h^5) \ .$$

Nehmen Sie im Folgenden an, daß das Integral der vierten Ableitung des Integranden über $[a, b]$ nicht null ist. Benutzen Sie auch, daß offensichtlich

$$S(h) - S(h/2) \ = \ S(h) - I - (S(h/2) - I) \quad \text{und} \quad S(h/2) - S(h/4) \ = \ S(h/2) - I - (S(h/4) - I)$$

und betrachten Sie den Quotienten $\frac{S(h)-S(h/2)}{S(h/2)-S(h/4)}$.

Zwei Integrale wurden mittels der summierten Simpsonregel mit Schrittweiten der Form $h = (\frac{1}{2})^i, i = 0, 1, 2, \ldots$ genähert.

h	$S_1(h)$	$S_2(h)$
1.0	1.37790384228	0.65652626479
0.5	1.37801711902	0.66307928008
0.25	1.37802414599	0.66539818862
0.125	1.37802458433	0.66621818274
0.0625	1.37802461172	0.66650810307
0.03125	1.37802461343	0.66661060593

Ist es plausibel anzunehmen, daß die Integranden C^4-Funktionen sind ?

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 4, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 10 Bestimmen Sie die genaue Ordnung der Quadraturformel

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \frac{b-a}{10}\Big(f(a)+4f(a+(b-a)/3)+4f(a+2(b-a)/3)+f(b)\Big)\ .$$

O.B.d.A. nehmen wir $a=0$ und $b=1$. Wir testen nun nacheinander die Monome bis sich eine Abweichung zwischen Integralwert und Summenwert ergibt:

$$\begin{bmatrix} f & \int_0^1 & \textit{Näherungswert} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ x^2 & \frac{1}{3} & \frac{29}{90} \end{bmatrix}$$

Die Ordnung ist also (nur) 2. (Mit den Gewichten $(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)$ erzielt man bei diesen Knoten die Ordnung 4).

Ü 11 (*Rechteckregel*)
Eine andere Klasse von Quadraturformeln ergibt sich, wenn man die Knoten frei variieren lässt. Bei einem einzigen Knoten ergibt sich die Formel

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\omega_0 f(x_0).$$

a) Bestimmen Sie die Werte für ω_0 und x_0 so, daß die Quadraturformel von der Ordnung mindestens 2 ist. Betrachten Sie zuerst den Speziallfall $a=0,\ b=1$ und bestimmen Sie anschließend die Formel für den Allgemeinfall.

b) Zeigen Sie, daß die in a) erhaltene Rechteckregel von der Ordnung genau 2 ist.

a) *Damit die Quadraturformel von der Ordnung mindestens 2 ist, muss sie genau für alle Polynome vom Grad höchstens 1 exakt sein. Da die Polynome $p_0(x)=1$ und $p_1(x)=x$ eine Basis von Π_1 bilden, ist es ausrechend, die Exaktheit nur für diese Polynome zu zeigen:*

$$\int_0^1 1\ dx = 1 = \omega_0 \quad \textit{und} \quad \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2} = \omega_0 x_0$$

Daraus erhält man: $w_0 = 1$ und $x_0 = \frac{1}{2}$ und

$$\int_0^1 f(x)\ dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Transformation für den Allgemeinfall (Substitution $x = a + (b-a)t$):

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\ dt \\
&\approx (b-a)\ f\left(a+\frac{b-a}{2}\right) \\
&= (b-a)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right).
\end{aligned}$$

b) Man betrachte $a = 0,\ b = 1$ und $p_2(x) = x^2$:

$$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{aber} \quad \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}.$$

Die Rechteckregel ist also nicht exakt für p_2, daher ist sie von der Ordnung genau 2.

Ü 12 (*Quadraturformel, Ordnung*)
Folgende Quadraturformel soll hergeleitet werden:

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\ dx \approx \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1).$$

Bestimmen Sie die Werte für $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ so, daß die Quadraturformel von der Ordnung mindestens 3 ist.

Damit die Quadraturformel von der Ordnung mindestens 3 ist, muss sie genau für alle Polynome vom Grad höchstens 2 exakt sein. Da die Polynome $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$ eine Basis von Π_2 bilden, ist es ausreichend, die Exaktheit nur für diese Polynome zu zeigen:

$$\begin{array}{lcccrcccc}
\int_{-1}^{1} x^2\cdot 1\ dx &=& \frac{2}{3} &=& \omega_0 &+& \omega_1 &+& \omega_2, \\
\int_{-1}^{1} x^2\cdot x\ dx &=& 0 &=& -\omega_0 &+& 0 &+& \omega_2, \\
\int_{-1}^{1} x^2\cdot x^2\ dx &=& \frac{2}{5} &=& \omega_0 &+& 0 &+& \omega_2.
\end{array}$$

Als Lösung des Systems erhält man $\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$ und $\omega_1 = \frac{4}{15}$ und damit

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\ dx \approx \frac{1}{15}[3f(-1) + 4f(0) + 3f(1)].$$

Ü 13 Riemann-Summe.
Sei $f \in C[a,b]$ beliebig mit $x_i = a + ih$, $i = 0,\dots,n$, $h = (b-a)/n$ und sei

$$M(h) = \frac{h}{8}\sum_{i=0}^{n-1}\left(3f(x_i+\frac{h}{6}) + 2f(x_i+\frac{h}{2}) + 3f(x_i+\frac{5h}{6})\right).$$

Um die Konvergenz dieser Formel für $h \to 0$ für beliebiges nur stetiges f zu zeigen, muss man die Formel als Riemannsumme schreiben, also ein Gitter $z_0 = a, \dots, z_{N(h)} = b$ erzeugen, sodaß jeder Knoten genau in ein Teilintervall $[z_i, z_{i+1}]$ fällt. Welche Rolle spielen also hier die Gewichte?

Zeigen Sie

$$\lim_{h \to 0} M(h) = \int_a^b f(t)dt.$$

Hinweis: Interpretieren Sie die Formel als Riemann-Summe.

Wir betrachten folgende Zerlegung des Intervalls [a,b]:

$$\mathcal{Z} : a = x_0 < x_0 + \frac{3h}{8} < x_0 + \frac{5h}{8} < x_1 < x_1 + \frac{3h}{8} < \cdots < b$$

Da jeweils $x_i + \frac{h}{6} \in [x_i, x_i + \frac{3h}{8}]$, $x_i + \frac{h}{2} \in [x_i + \frac{3h}{8}, x_i + \frac{5h}{8}]$, *und* $x_i + \frac{5h}{6} \in [x_i + \frac{5h}{8}, x_i + h]$ *gilt, ist die obige Summe eine Riemann-Summe zur Zerlegung* $\mathcal{Z}$. *Diese konvergiert, da* f *stetig ist.*

Hausübung

H 10 Quadratur eines Splines

Sei $\mathcal{Z} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a, b]$. Ein kubischer Spline auf dieser Zerlegung soll mit der zusammmengesetzten Simpsonregel exakt integriert werden. Wie müssen die Teilintervalle gewählt werden, wenn man möglichst wenig Splineauswertungen haben möchte? Bedenken Sie, daß die Simpsonregel kubische Polynome exakt integriert, aber ein Spline kein Polynom vom Grad drei ist!

Wählt man als Teilintervalle gerade die Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, so ist der kubische Spline auf diesen Teilintervallen jeweils ein Polynom aus Π_3. Mit der Simpsonregel wird dieses Polynom auf dem Teilintervall exakt integriert. Damit wird mit dieser Wahl der Teilintervalle der kubische Spline exakt integriert.

Würde man weniger Teilintervalle wählen oder die n Teilintervalle anders wählen, gäbe es ein Teilintervall $[y_j, y_{j+1}]$ mit $y_j < x_i$ und $y_{j+1} > x_i$ für ein Paar i, j. Wählt man ein solches Teilintervall $[y_j, y_{j+1}]$ mit $y_j < x_i$ und $y_{j+1} > x_i$ für ein Paar i, j, so ist der Spline auf diesem Intervall kein Polynom und kann also im allgemeinen durch die Simpsonregel nicht exakt integriert werden.

Damit muss man mindestens n Teilintervalle wie anfangs beschrieben wählen, um jeden kubischen Spline auf der Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit der zusammengesetzten Simpsonregel exakt integrieren zu können.

H 11 Quadraturformel.

Man zeige: Es gibt keine $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ und t_1 so, daß die Näherungsformel

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(1)$$

für alle $f \in \Pi_4$ exakt wird. Gibt es eine Formel dieses Typs, die für $f \in \Pi_3$ exakt ist?

Wir setzen die Monome $1, x, \ldots, x^4$ ein und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 &= 2 \\
-\omega_0 + \omega_1 t_1 + \omega_2 &= 0 \\
\omega_0 + \omega_1 t_1^2 + \omega_2 &= \frac{2}{3} \\
-\omega_0 + \omega_1 t_1^3 + \omega_2 &= 0 \\
\omega_0 + \omega_1 t_1^4 + \omega_2 &= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten und vierten Gleichung ergibt

$$\omega_1 t_1 (t_1^2 - 1) = 0.$$

Also ist $\omega_1 = 0$ oder $t_1 = 0$ oder $t_1^2 = 1$. Subtraktion der dritten und fünften Gleichung ergibt

$$\omega_1 t_1^2 (t_1^2 - 1) = -\frac{4}{15}.$$

Nach den vorherigen Überlegungen ist die linke Seite aber 0. Dies ist ein Widerspruch. Also ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

H 12 Konstruieren Sie eine Quadraturformel des Typs

$$\int_0^{3h} f(x)\mathrm{d}x \;=\; Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)$$

von möglichst hoher Ordnung. Wozu könnte eine solche Formel nützlich sein? Denken Sie an

$$y(3h) \;=\; y(0) + \int_0^{3h} f(z, y(z))\mathrm{d}z$$

für eine gewöhnliche DGL

$$y' \;=\; f(x, y(x)) \;, \quad y(0) \;=\; y_0$$

Wir benutzen wieder die Monome als Testfunktionen und erhalten zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B + C &= 3h \\ Bh + 2Ch &= 9h^2/2 \\ Bh^2 + 4Ch^2 &= 9h^3 \end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \;=\; h \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$A \;=\; (3/4)h, \; B \;=\; 0 \;, \; C \;=\; (9/4)h$$

Wegen

$$8h^3C \;=\; (72/4)h^4 \;\neq\; (81/4)h^4$$

hat die Formel die Ordnung 3. Man könnte sie als expliziten Integrator für Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen benutzen, indem man als Integranden das quadratische Interpolationspolynom der Werte $(0, f(0, y_0)), (h, f(h, y_1^h)), (2h, f(2h, y_2^h))$ *benutzt. (das ist die Adams-Bashforth-3-Schritt-Formel)*

H 13 Das Restglied der summierten Simpsonregel $S(h)$ kann auch geschrieben werden als

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;-\; S(h) \;=\; -\frac{h^4}{180}\int_a^b f^{(4)}(x)\mathrm{d}x + \mathcal{O}(h^5) \;.$$

Nehmen Sie im Folgenden an, daß das Integral der vierten Ableitung des Integranden über $[a, b]$ nicht null ist. Benutzen Sie auch, daß offensichtlich

$$S(h) - S(h/2) \;=\; S(h) - I - (S(h/2) - I) \quad \text{und} \quad S(h/2) - S(h/4) \;=\; S(h/2) - I - (S(h/4) - I)$$

und betrachten Sie den Quotienten $\frac{S(h)-S(h/2)}{S(h/2)-S(h/4)}$.

Zwei Integrale wurden mittels der summierten Simpsonregel mit Schrittweiten der Form $h = (\frac{1}{2})^i, i = 0, 1, 2, \ldots$ genähert.

h	$S_1(h)$	$S_2(h)$
1.0	1.37790384228	0.65652626479
0.5	1.37801711902	0.66307928008
0.25	1.37802414599	0.66539818862
0.125	1.37802458433	0.66621818274
0.0625	1.37802461172	0.66650810307
0.03125	1.37802461343	0.66661060593

Ist es plausibel anzunehmen, daß die Integranden C^4-Funktionen sind ?

Die Berechnung der Quotienten $Q_i(h) = \frac{S_i(h)-S_i(h/2)}{S_i(h/2)-S_i(h/4)}, i = 1, 2$ *ergibt*

h	$Q_1(h)$	$Q_2(h)$
1.0	*16.122*	*2.826*
0.5	*16.03*	*2.828*
0.25	*16.008*	*2.828*
0.125	*16.002*	*2.828*

Im Falle der Funktion f_1 *ist die Annahmen* $f \in C^4([a, b])$ *durchaus plausibel, im Falle* f_2 *hingegen nicht. Als Funktionen wurden* $f_1 = e^x \cos(x)$ *und* $f_2 = \sqrt{x}$ *gewählt.*