Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

30. Oktober 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 3

Präsenzübung

Ü 7 bilineare Interpolation im $\mathbb{R}^2$.

a) Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Ecken des Quadrates $I \times I$, $I = [0, 1]$.

x	0	1	0	1
y	0	0	1	1
f	2	1	3	5

Interpolieren Sie bilinear, d.h. bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom der Form:

$$P_{1,1}(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

b) Wiederholen Sie dies mit dem um $\pi/4$ gedrehten Quadrat

x	-1	1	0	0
y	0	0	-1	1
f	1	-1	2	0

Ü 8 Stückweise affin lineare und stetige Interpolation auf einer Triangulierung

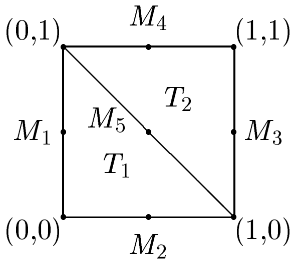
Gegeben seien die Daten

	P_0	P_1	P_2	P_3
x	0	1	0	1/3
y	0	0	1	1/3
z	0	0	0	2

Stellen Sie dazu eine Triangulierung auf und bestimmen Sie die stetige stückweise affin lineare Interpolierende.

Ü 9 Lokale Eindeutigkeit und globale Stetigkeit , Grad=2

Gegeben ist folgende Triangulation des Einheitsquadrates $[0,1]^2$:



a) Zeigen Sie, daß durch die Vorgabe der Funktionswerte an den Ecken und an den Seitenmittelpunkten M_i der beiden Dreiecke T_j jeweils eine quadratische Funktion

$$g_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 xy + e_1 x^2 + f_1 y^2 \ ,$$
$$g_2(x) = a_2 + b_2(1-x) + c_2(1-y) + d_2(1-x)(1-y) + e_2(1-x)^2 + f_2(1-y)^2$$

eindeutig definiert ist.

b) Ist die zusammengesetzte Funktion

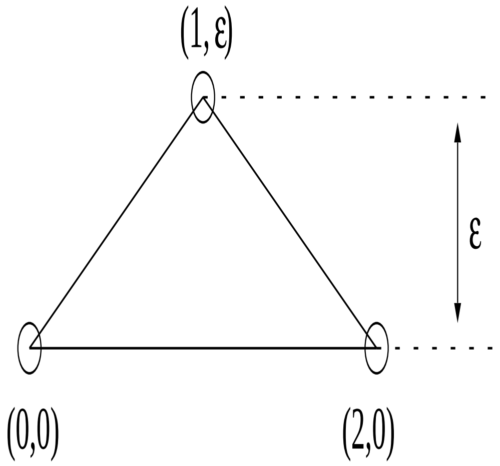
$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \in T_1 \\ g_2(x) & x \in T_2 \end{cases}$$

immer stetig auf $[0,1]^2$?

Hausübung

H 7 (Lineare Interpolation in 2D: schlecht gewähltes Dreieck)

Gegeben sei eine Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ und das Dreieck mit den Ecken $(0,0), (2,0), (1,\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$.



a) Interpolieren Sie die Funktion f durch eine (affin) lineare Funktion $l_\varepsilon(x,y) = ax + by + c$, wobei die Stützstellen gleich den Ecken des Dreiecks sind.

b) Berechnen Sie den Fehler $\|\nabla f(1,0) - \nabla l_\varepsilon(1,0)\|$. Wie verhält sich der Fehler für $\varepsilon \to 0$? Vergleichen Sie dies mit der Fehlerabschätzung aus Satz 1.4.2.

H 8 Tensorproduktinterpolation ist einfach

Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Ecken des Würfels I^3, $I = [0,1]$.

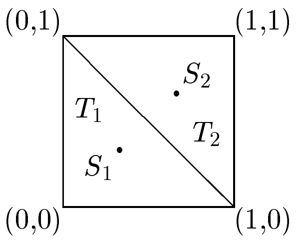
x	0	1	0	1	0	1	0	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	0	0	0	1	1	1	1
f	1	3	2	6	1	1	5	3

Interpolieren Sie trilinear, d.h. bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom der Form:

$$P_{1,1,1}(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$$

H 9 lokale Eindeutigkeit impliziert nicht Stetigkeit

Gegeben ist folgende Triangulation des Einheitsquadrates $[0,1]^2$:



a) Zeigen Sie, daß durch die Vorgabe der Funktionswerte an den Ecken und an den Schwerpunkten S_j der beiden Dreiecke T_j jeweils eine bilineare Funktion

$$f_j(x) = a_j + b_j x + c_j y + d_j xy, \quad j = 1, 2$$

eindeutig definiert ist.

b) Zeigen Sie durch eine spezielle und unsymmetrische Funktionswertvorgabe, daß die zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in T_1 \\ f_2(x) & x \in T_2 \end{cases}$$

nicht stetig ist auf $[0, 1]^2$.

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 3, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 7 bilineare Interpolation im $\mathbb{R}^2$.

a) Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Ecken des Quadrates $I \times I$, $I = [0, 1]$.

x	0	1	0	1
y	0	0	1	1
f	2	1	3	5

Interpolieren Sie bilinear, d.h. bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom der Form:

$$P_{1,1}(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

b) Wiederholen Sie dies mit dem um $\pi/4$ gedrehten Quadrat

x	-1	1	0	0
y	0	0	-1	1
f	1	-1	2	0

a) Nach Skript gilt:

$$\begin{aligned}
P_{1,1}(x, y) &= f(0,0) \cdot L_{0,1}(x) \cdot L_{0,1}(y) + f(1,0) \cdot L_{1,1}(x) \cdot L_{0,1}(y) \\
&\quad + f(0,1) \cdot L_{0,1}(x) \cdot L_{1,1}(y) + f(1,1) \cdot L_{1,1}(x) \cdot L_{1,1}(y) \\
&= 2 \cdot \frac{x-1}{-1} \cdot \frac{y-1}{-1} + 1 \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{y-1}{-1} + 3 \cdot \frac{x-1}{-1} \cdot \frac{y}{1} + 5 \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1} \\
&= 2 \cdot (x-1)(y-1) - 1 \cdot x(y-1) - 3 \cdot (x-1)y + 5 \cdot xy \\
&= (2 - 1 - 3 + 5) \cdot xy + (1 - 2) \cdot x + (3 - 2) \cdot y + 2 \\
&= 3xy - x + y + 2
\end{aligned}$$

Hier funktioniert also alles: dies ist der Tensorproduktfall.

b) Wir versuchen es mit dem direkten bilinearen Ansatz

$$a + bx + cy + dxy$$

und stellen das zugehörige lineare Gleichungssystem auf:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Matrix enthält eine Nullspalte und hat Rang 3, die um die rechte Seite erweiterte Matrix hat aber Rang 4, also ist die Aufgabe nicht lösbar. Geometrie und Interpolationstyp sind nicht unabhängig voneinander wählbar!

Ü 8 Stückweise affin lineare und stetige Interpolation auf einer Triangulierung

Gegeben seien die Daten

	P_0	P_1	P_2	P_3
x	0	1	0	1/3
y	0	0	1	1/3
z	0	0	0	2

Stellen Sie dazu eine Triangulierung auf und bestimmen Sie die stetige stückweise affin lineare Interpolierende.

Wir haben drei Dreiecke

$$T_0 \;=\; conv(P_0, P_2, P_3),\; T_1 \;=\; conv(P_0, P_1, P_3),\; T_2 \;=\; conv(P_1, P_2, P_3)\;.$$

conv bezeichnet die konvexe Hülle. Weil hier jeweils eine Kante eines Dreiecks aufgrund der Daten konstant den $z-$Wert null hat, ist die Aufstellung der Interpolierenden besonders einfach: Der Ansatz muss jeweils

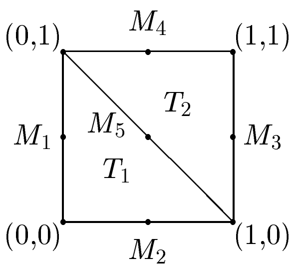
$$a(n_1 x + n_2 y) + c = z$$

lauten mit einer geeigneten Skalierung a und einer geeigneten Konstanten c , wobei (n_1, n_2) Normale auf dieser Kante ist. Dies liefert unter Berücksichtigugng des Wertes 2 bei P_3

$$\varphi(x,y) \;=\; \begin{cases} 6x & \text{für} \quad (x,y) \in T_0 \\ 6y & \text{für} \quad (x,y) \in T_1 \\ 6(-x-y+\frac{2}{3})+2 & \text{für} \quad (x,y) \in T_2 \end{cases}$$

Ü 9 Lokale Eindeutigkeit und globale Stetigkeit , Grad=2

Gegeben ist folgende Triangulation des Einheitsquadrates $[0,1]^2$:



a) Zeigen Sie, daß durch die Vorgabe der Funktionswerte an den Ecken und an den Seitenmittelpunkten M_i der beiden Dreiecke T_j jeweils eine quadratische Funktion

$$g_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 xy + e_1 x^2 + f_1 y^2 \ ,$$
$$g_2(x) = a_2 + b_2(1-x) + c_2(1-y) + d_2(1-x)(1-y) + e_2(1-x)^2 + f_2(1-y)^2$$

eindeutig definiert ist.

b) Ist die zusammengesetzte Funktion

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \in T_1 \\ g_2(x) & x \in T_2 \end{cases}$$

immer stetig auf $[0,1]^2$?

a) *Die Seitenmittelpunkte des Dreiecks T_1 lauten $M_1 = (0, \frac{1}{2})$, $M_2 = (\frac{1}{2}, 0)$ und $M_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Mit diesen und den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ergibt sich im Dreieck T_1 das Gleichungssystem:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(0,0) \\ g_1(1,0) \\ g_1(0,1) \\ g_1(\frac{1}{2},0) \\ g_1(0,\frac{1}{2}) \\ g_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \end{pmatrix} .$$

Die Matrix des Gleichungssytems ist regulär, da $\det A_1 = \frac{1}{64} \neq 0$, und damit ist die Lösung $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1)$ eindeutig.

Mit $M_4 = (\frac{1}{2}, 1)$, $M_3 = (1, \frac{1}{2})$ und $M_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und den entsprechenden Eckpunkten ergibt sich im Dreieck T_2 das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ e_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2(1,1) \\ g_2(1,0) \\ g_2(0,1) \\ g_2(\frac{1}{2},1) \\ g_2(1,\frac{1}{2}) \\ g_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \end{pmatrix} .$$

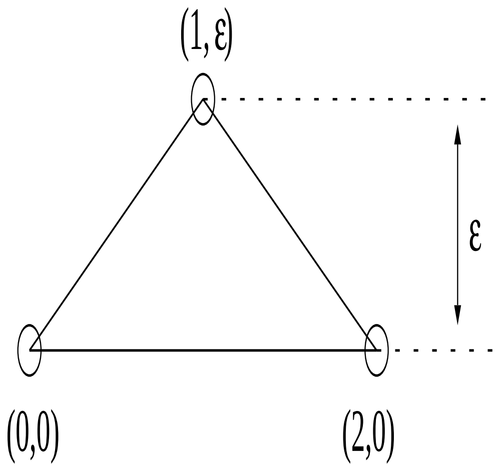
Die Matrix ist dieselbe wie oben und damit regulär.

b) *Die zusammengesetzte Funktion g ist stetig.*

Der Grund hierfür ist, daß auf der „Treffkante" $\{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ drei Funktionswerte vorgegeben sind. Auf dieser Kante ergeben sich für g_1 und g_2 quadratische Polynome in x und diese sind somit durch die Vorgabe von drei Funktionswerten eindeutig bestimmt. Es gilt also $g_1 = g_2$ auf der Kante $(x, 1-x)$. Die zusammengesetzte Funktion g ist daher stetig.

Hausübung

H 7 **(Lineare Interpolation in 2D: schlecht gewähltes Dreieck)**
Gegeben sei eine Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ und das Dreieck mit den Ecken $(0, 0), (2, 0), (1, \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$.



a) Interpolieren Sie die Funktion f durch eine (affin) lineare Funktion $l_\varepsilon(x, y) = ax + by + c$, wobei die Stützstellen gleich den Ecken des Dreiecks sind.

b) Berechnen Sie den Fehler $\|\nabla f(1, 0) - \nabla l_\varepsilon(1, 0)\|$. Wie verhält sich der Fehler für $\varepsilon \to 0$? Vergleichen Sie dies mit der Fehlerabschätzung aus Satz 1.4.2.

a) Der Interpoland ist von der Form

$$l_\varepsilon(x, y) = a + bx + cy.$$

Die Interpolationsbedingungen liefern das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} 0 = f(0,0) = l_\varepsilon(0,0) = a & \to & a = 0 \\ 4 = f(2,0) = l_\varepsilon(2,0) = a + 2b & \to & b = 2 \\ 1 + \varepsilon^2 = f(1,\varepsilon) = l_\varepsilon(1,\varepsilon) = a + b + c\varepsilon & \to & c = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \end{array}$$

Daraus folgt

$$l_\varepsilon(x, y) = 2x + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} y.$$

b) Es ist

$$\nabla f(x, y) - \nabla l_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\|\nabla f(1, 0) - \nabla l_\varepsilon(1, 0)\| = \left| \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} \right| \to \infty \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Da der kleinste Winkel im Dreieck hier gegen null geht mit ε gegen null ist dies aufgrund der Fehleraussage in Satz 1.4.2 auch nicht anders zu erwarten.

H 8 Tensorproduktinterpolation ist einfach

Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Ecken des Würfels I^3, $I = [0,1]$.

x	0	1	0	1	0	1	0	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	0	0	0	1	1	1	1
f	1	3	2	6	1	1	5	3

Interpolieren Sie trilinear, d.h. bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom der Form:

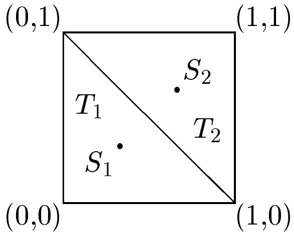
$$P_{1,1,1}(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& P_{1,1,1}(x,y,z) \\
= \; & f(0,0,0)\cdot L_{0,1}(x)\cdot L_{0,1}(y)\cdot L_{0,1}(z) + f(1,0,0)\cdot L_{1,1}(x)\cdot L_{0,1}(y)\cdot L_{0,1}(z) \\
& + f(0,1,0)\cdot L_{0,1}(x)\cdot L_{1,1}(y)\cdot L_{0,1}(z) + f(1,1,0)\cdot L_{1,1}(x)\cdot L_{1,1}(y)\cdot L_{0,1}(z) \\
& + f(0,0,1)\cdot L_{0,1}(x)\cdot L_{0,1}(y)\cdot L_{1,1}(z) + f(1,0,1)\cdot L_{1,1}(x)\cdot L_{0,1}(y)\cdot L_{1,1}(z) \\
& + f(0,1,1)\cdot L_{0,1}(x)\cdot L_{1,1}(y)\cdot L_{1,1}(z) + f(1,1,1)\cdot L_{1,1}(x)\cdot L_{1,1}(y)\cdot L_{1,1}(z) \\
= \; & 1\cdot\frac{x-1}{-1}\cdot\frac{y-1}{-1}\cdot\frac{z-1}{-1} + 3\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{y-1}{-1}\cdot\frac{z-1}{-1} \\
& + 2\cdot\frac{x-1}{-1}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{z-1}{-1} + 6\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{z-1}{-1} \\
& + 1\cdot\frac{x-1}{-1}\cdot\frac{y-1}{-1}\cdot\frac{z}{1} + 1\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{y-1}{-1}\cdot\frac{z}{1} \\
& + 5\cdot\frac{x-1}{-1}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{z}{1} + 3\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}\cdot\frac{z}{1} \\
= \; & -1\cdot(x-1)(y-1)(z-1) + 3\cdot x(y-1)(z-1) \\
& + 2\cdot(x-1)y(z-1) - 6\cdot xy(z-1) \\
& + 1\cdot(x-1)(y-1)z - 1\cdot x(y-1)z \\
& - 5\cdot(x-1)yz + 3\cdot xyz \\
= \; & -4xyz + 2xy - 2xz + 3yz + 2x + y + 1
\end{aligned}$$

H 9 lokale Eindeutigkeit impliziert nicht Stetigkeit

Gegeben ist folgende Triangulation des Einheitsquadrates $[0,1]^2$:



a) Zeigen Sie, daß durch die Vorgabe der Funktionswerte an den Ecken und an den Schwerpunkten S_j der beiden Dreiecke T_j jeweils eine bilineare Funktion

$$f_j(x) = a_j + b_j x + c_j y + d_j xy, \quad j = 1, 2$$

eindeutig definiert ist.

b) Zeigen Sie durch eine spezielle und unsymmetrische Funktionswertvorgabe, daß die zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in T_1 \\ f_2(x) & x \in T_2 \end{cases}$$

nicht stetig ist auf $[0,1]^2$.

a) *Die beiden Schwerpunkte lauten* $S_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ *und* $S_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. *Damit ergibt sich im Dreieck* T_1 *das Gleichungssystem:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(0,0) \\ f_1(1,0) \\ f_1(0,1) \\ f_1(S_1) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix des Gleichungssytems ist offensichtlich regulär und damit ist die Lösung (a_1, b_1, c_1, d_1) *eindeutig. Im zweiten Dreieck* T_2 *ergibt sich*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(1,0) \\ f_2(0,1) \\ f_2(1,1) \\ f_2(S_2) \end{pmatrix}.$$

Auch hier ist die Matrix regulär, da für die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} = (\frac{2}{3} - \frac{4}{9}) - (\frac{4}{9} + 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{9}) = -\frac{1}{9}$$

gilt.

b) *Für die spezielle Wahl* $f(0,0) = 1$ *und* $f(1,0) = \cdots = f(S_2) = 0$ *ergibt sich für* $f_2 \equiv 0$. *Für* f_1 *gilt jedoch* $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = -1$ *und* $d_1 = -3$. *Damit folgt* $f_1(x, 1-x) = -3(1-x) \not\equiv 0$. *Folglich ist* f *unstetig auf der Diagonalen von* $(0,1)$ *nach* $(1,0)$.