Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

23. Oktober 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 2

Präsenzübung

Ü 4 Inverse Interpolation.

Gegeben seien die folgenden Werte der Funktion $f(x) = 2x - \sin(x)$:

x	0.0	0.48160	0.88786
$f(x)$	0.0	0.5	1.0

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv.

Gesucht ist x^* mit $f(x^*) = \frac{3}{4}$.

a) Approximieren Sie x^*, indem Sie zu den gegebenen Daten eine Polynom–Interpolation für die Umkehrfunktion f^{-1} durchführen.

b) Geben Sie für den gefundenen Wert $p(\frac{3}{4})$ eine Fehlerabschätzung an.

<u>Hinweis:</u> Die höheren Ableitungen der Umkehrfunktion erhält man durch Differenzieren von

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Ü 5 Man bestimme den natürlichen, interpolierenden, kubischen Spline zu den Daten

i	0	1	2	3	4
x_i	-3	-2	0	1	2
y_i	0	2	2	11	18

Ü 6 Es sei

x	1	3	4	5	8
y	0	2	3	4	7

Wie lautet der natürliche interpolierende kubische Spline zu diesen Daten? Bitte begründen Sie Ihre Antwort genau.

Hausübung

H 4 Interpolationspolynome können verwendet werden, um Integrale über Funktionen in einem Intervall $[a, b]$ nur durch Funktionsauswertungen zu approximieren. Eine Variante ergibt sich, wenn die Funktion an den Punkten $x_1 = a + \frac{1}{3}(b-a)$ und $x_2 = a + \frac{2}{3}(b-a)$ ausgewertet wird und die lineare Interpolierende integriert wird.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = (b-a)(\omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)).$$

Berechnen Sie die Gewichte ω_i und interpretieren Sie das Resultat geometrisch.

H 5 Gibt es einen Wert $y(0)$, so daß der natürliche Spline zu den Daten

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	1	$y(0)$	0	-4

im Intervall $[-2, -1]$ $s_0(x) = 3x + 4$ und im Intervall $[1, 2]$ $s_3(x) = 4 - 4x$ lautet?

H 6 Sei $\ldots < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots$ eine nicht notwendigerweise äquidistante Gittereinteilung auf $\mathbb{R}$.

Gesucht ist eine Funktion f aus C^2, $f \not\equiv 0$, die stückweise aus Π_3 ist und einen minimalen Träger besitzt. Auf einem Träger mit 4 Teilintervallen ist dies in der Tat möglich, eine formal einfache Darstellung mit der freien Funktionsvariablen z ist

$$B(z) \;=\; g_{[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}(z)$$

also die 4-te dividierte Differenz der Funktion zweier Variablen $g(x, z)$ bezüglich der Variablen x mit

$$g(x,z) \;=\; \begin{cases} (z-x)^3 & \text{für} \quad z \geq x \\ 0 & \text{für} \quad z < x \end{cases}$$

Diese ist auf einer Intervallbreite von vier Teilintervallen ungleich Null. Es stellt sich nun die Frage, ob es eine entsprechende Funktion mit kleinerem Träger gibt. Untersuchen Sie dies auf den Intervallen $[x_0, x_2]$ bzw. $[x_0, x_3]$.

Hinweis: Der Träger einer Funktion ist definiert als

$$supp(f) := \{x | f(x) \neq 0\}.$$

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 2, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 4 Inverse Interpolation.

Gegeben seien die folgenden Werte der Funktion $f(x) = 2x - \sin(x)$:

x	0.0	0.48160	0.88786
$f(x)$	0.0	0.5	1.0

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv.

Gesucht ist x^* mit $f(x^*) = \frac{3}{4}$.

a) Approximieren Sie x^*, indem Sie zu den gegebenen Daten eine Polynom–Interpolation für die Umkehrfunktion f^{-1} durchführen.

b) Geben Sie für den gefundenen Wert $p(\frac{3}{4})$ eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis: Die höheren Ableitungen der Umkehrfunktion erhält man durch Differenzieren von

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

a) *Es werden hier die Wertepaare $(f(x_i), x_i)$ der Umkehrfunktion interpoliert. Schema der dividierten Differenzen:*

i	$f(x_i)$	x_i		
-0	0	0	0.9632	-0.15068
1	0.5	0.48160	0.81252	
2	1	0.88768		

Mit $f(x^*) = \frac{3}{4}$ folgt:

$$\begin{aligned} x^* = f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) &\approx p_2\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \gamma_{0,0} + \gamma_{0,1}\left(\frac{3}{4} - 0\right) + \gamma_{0,2}\left(\frac{3}{4} - 0\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 0.6941475 \end{aligned}$$

b) *Es gilt die Fehlerdarstellung:*

$$\left| x^* - p_2\left(\frac{3}{4}\right) \right| = \left| \frac{(f^{-1})'''(\xi)}{3!} \prod_{i=0}^{2} (0.75 - f(x_i)) \right| \quad \text{mit } \xi \in (0,1)$$

Es ist weiterhin

$$\left| \frac{1}{3!} \prod_{i=0}^{2} (0.75 - f(x_i)) \right| = 0.0078125$$

Wir berechnen nun $(f^{-1}(x))'''$ *mit Hilfe des Hinweises :*
Mit $z := f^{-1}(\xi)$ *und*

$$(f^{-1}(\xi))' = \frac{1}{f'(z)}$$

folgt zunächst

$$\begin{aligned}
(f^{-1}(\xi))'' &= \frac{d}{d\xi}(f^{-1}(\xi)') \quad = \quad \frac{d}{d\xi}(\frac{1}{f'(z)}) \\
&= -\frac{1}{(f'(z))^2} \cdot f''(z) \cdot (f^{-1}(\xi))' \\
&= -\frac{1}{(f'(z))^3} \cdot f''(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f^{-1}(\xi))''' &= \frac{d}{d\xi}(\frac{-f''(z)}{(f'(z))^3}) \\
&= -\frac{f'''(z)(f'(z))^3 - 3(f'(z))^2(f''(z))^2}{(f'(z))^6} \cdot (f^{-1}(\xi))' \\
&= -\frac{f'''(z)f'(z) - 3(f''(z))^2}{(f'(z))^5}
\end{aligned}$$

Mit $f'(z) = 2 - \cos(z)$, $f''(z) = \sin(z)$, $f'''(z) = \cos(z)$ *folgt wegen* $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ *:*

$$\begin{aligned}
(f^{-1}(\xi))''' &= -\frac{\cos(z)(2 - \cos(z)) - 3(1 - \cos^2(z))}{(2 - \cos(z))^5} \\
&= -\frac{-2\cos^2(z) - 2\cos(z) + 3}{(2 - \cos(z))^5}
\end{aligned}$$

Da f *bijektiv ist, folgt aus* $\xi \in (0,1)$, *daß* $z \in (0,\, 0.88768)$ *ist. Daher gilt* $\cos(z) \in (0.63108,\, 1)$
und $|2\cos^2(z) + 2\cos(z) - 3| \leq 1$
und $|2 - \cos(z)|^5 \geq 1$.
Daraus folgt:

$$|(f^{-1}(\xi))'''| \leq 1$$

Als Fehlerabschätzung erhalten wir:

$$|x^* - 0.69415| \leq 0.0078125.$$

Ü 5 Man bestimme den natürlichen, interpolierenden, kubischen Spline zu den Daten

i	0	1	2	3	4
x_i	-3	-2	0	1	2
y_i	0	2	2	11	18

Rechenschema:

i	x_i	h_i	$2(h_i + h_{i+1})$	y_i	Δ_i	r_i
0	-3	—	—	0	—	—
1	-2	1	6	2	2	—
2	0	2	6	2	0	-2
3	1	1	4	11	9	9
4	2	1	—	18	7	-2

mit

$$\begin{gathered} h_i = x_i - x_{i-1} \\ \Delta_i = (y_i - y_{i-1})/h_i \\ r_i = \Delta_i - \Delta_{i-1} \text{ (rechte Seite)} \end{gathered} .$$

Gleichungssystem ($M_0^* = M_4^* = 0$):

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^* \\ M_2^* \\ M_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} M_1^* \\ M_2^* \\ M_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die restlichen Koeffizienten erhält man mit

i	y_i	M_i^*	h_{i+1}^2	d_i	Δ_{i+1}	$M_{i+1}^* - M_i^*$	h_{i+1}	c_i
0	0	0	1	0	2	-1	1	3
1	2	-1	4	6	0	3	2	-6
2	2	2	1	0	9	-3	1	12
3	11	-1	1	12	7	1	1	6

mit $d_i = y_i - M_i^* \cdot h_{i+1}^2$ und $c_i = \Delta_{i+1} - h_{i+1}(M_{i+1}^* - M_i^*)$.
Als Spline ergibt sich daher wegen $s(x) = 1/h_{i+1}\left(M_i^*(x_{i+1} - x)^3 + M_{i+1}^*(x - x_i)^3\right) + c_i(x - x_i) + d_i$ für $x \in [x_i, x_{i+1}]$ die Darstellung

$$s(x) = \begin{cases} -(x+3)^3 + 3(x+3) & , \quad x \in [-3,-2] \\ \frac{1}{2}x^3 + (x+2)^3 - 6(x+2) + 6 & , \quad x \in [-2,0] \\ 2(1-x)^3 - x^3 + 12x & , \quad x \in [0,1] \\ (x-2)^3 + 6(x-1) + 12 & , \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

Ü 6 Es sei

x	1	3	4	5	8
y	0	2	3	4	7

Wie lautet der natürliche interpolierende kubische Spline zu diesen Daten? Bitte begründen Sie Ihre Antwort genau.

Aufgrund der Eindeutigkeit des interpolierenden natürlichen kubischen Splines lautet die Lösung $s(x) = x - 1$, denn:

- *die Interpolationsbedingungen sind erfüllt,*
- $s \in C^2([1,8])$,
- *s erfüllt die Randbedingungen des natürlichen Splines, d.h. $s''(1) = 0$ und $s''(8) = 0$,*
- *s ist stückweise kubisch (höchstens!)*

Hausübung

H 4 Interpolationspolynome können verwendet werden, um Integrale über Funktionen in einem Intervall $[a, b]$ nur durch Funktionsauswertungen zu approximieren. Eine Variante ergibt sich, wenn die Funktion an den Punkten $x_1 = a + \frac{1}{3}(b-a)$ und $x_2 = a + \frac{2}{3}(b-a)$ ausgewertet wird und die lineare Interpolierende integriert wird.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = (b-a)(\omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)).$$

Berechnen Sie die Gewichte ω_i und interpretieren Sie das Resultat geometrisch.

Das Interpolationspolynom nach Lagrange ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= f(x_1)\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\
&= \frac{1}{x_2-x_1}(f(x_1)(x_2-x) + f(x_2)(x-x_1)) \\
&= \frac{3}{a+b}(f(x_1)(x_2-x) + f(x_2)(x-x_1))
\end{aligned}$$

Die Integration ergibt entsprechend

$$\begin{aligned}
\int_a^b p_1(x)dx &= \tfrac{3}{a+b}\left(f(x_1)(x_2x - \tfrac{1}{2}x^2) + f(x_2)(\tfrac{1}{2}x^2 - x_1x)\right)_a^b \\
&= \tfrac{b-a}{2}(f(x_1) + f(x_2)).
\end{aligned}$$

weil z.B.

$$\begin{aligned}
(\frac{2}{3}(a+b) - \frac{1}{2}x)x \mid_a^b &= \\
(\frac{2}{3}(a+b) - \frac{1}{2}b)b - (\frac{2}{3}(a+b) - \frac{1}{2}a)a &= \\
(\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b)b - (\frac{1}{6}a + \frac{2}{3}b)a &= \\
\frac{1}{6}(b-a)(b+a)
\end{aligned}$$

Folglich wird das Integral durch die Fläche eines Trapezes, dessen Seitenhöhen durch die Funktionswerte in x_1 und x_2 gegeben sind, angenähert. Dieses Vorgehen ergibt eine sogenannte offene Newton-Cotes-Formel.

H 5 Gibt es einen Wert $y(0)$, so daß der natürliche Spline zu den Daten

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	1	$y(0)$	0	-4

im Intervall $[-2, -1]$ $s_0(x) = 3x + 4$ und im Intervall $[1, 2]$ $s_3(x) = 4 - 4x$ lautet?

Da es sich um einen natürlichen Spline handelt, gilt $M_0^* = M_4^* = 0$.

Aus der Linearität von s_0 *und* s_3 *folgt außerdem:*

$$s_0''(x) \equiv 0 \text{ und } s_3''(x) \equiv 0, \text{ also insbesondere } M_1^* = M_3^* = 0.$$

Das GLS zur Bestimmung des Splines lautet daher:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_2^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) - 1 - (1+2) \\ -y(0) - (y(0) - 1) \\ -4 + y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) - 4 \\ -2y(0) + 1 \\ -4 + y(0) \end{pmatrix}$$

Die erste und dritte Gleichung sind gleich. Daher läßt sich dieses überbestimmte GLS eindeutig lösen:

$$M_2^* = -\frac{7}{6} \text{ und } y(0) = \frac{17}{6}.$$

Wählt man $y(0) = \frac{17}{6}$, *so gibt es einen interpolierenden natürlichen Spline mit den geforderten Eigenschaften.*

H 6 Sei $\ldots < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots$ eine nicht notwendigerweise äquidistante Gittereinteilung auf $\mathbb{R}$.

Gesucht ist eine Funktion f aus C^2, $f \not\equiv 0$, die stückweise aus Π_3 ist und einen minimalen Träger besitzt. Auf einem Träger mit 4 Teilintervallen ist dies in der Tat möglich, eine formal einfache Darstellung mit der freien Funktionsvariablen z ist

$$B(z) \; = \; g_{[x_{i-2},x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i+2}]}(z)$$

also die 4-te dividierte Differenz der Funktion zweier Variablen $g(x,z)$ bezüglich der Variablen x mit

$$g(x,z) \; = \; \begin{cases} (z-x)^3 & \text{für } z \geq x \\ 0 & \text{für } z < x \end{cases}$$

Diese ist auf einer Intervallbreite von vier Teilintervallen ungleich Null. Es stellt sich nun die Frage, ob es eine entsprechende Funktion mit kleinerem Träger gibt. Untersuchen Sie dies auf den Intervallen $[x_0, x_2]$ bzw. $[x_0, x_3]$.

Hinweis: Der Träger einer Funktion ist definiert als

$$supp(f) := \{x | f(x) \neq 0\}.$$

i) *Wir versuchen zunächst eine Konstruktion auf dem Intervall* $[x_0, x_2]$:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x \in [x_0, x_1] & , f_1 \in \Pi_3 \\ f_2(x) & , x \in [x_1, x_2] & , f_2 \in \Pi_3 \\ 0 & , sonst & \end{cases}$$

Da $f \in \mathbb{C}^2$ *sein soll, muss gelten:*

$$\begin{array}{ccccccc} f_1(x_0) & = & f_1'(x_0) & = & f_1''(x_0) & = & 0 \\ f_2(x_2) & = & f_2'(x_2) & = & f_2''(x_2) & = & 0 \end{array}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a(x-x_0)^3 \\ f_2(x) &= b(x-x_2)^3 \end{aligned}$$

Mit der Forderung der Stetigkeit an der Stelle x_1

$$f_1(x_1) = a(x_1-x_0)^3 = b(x_1-x_2)^3 = f_2(x_1)$$

folgt außerdem wegen $(x_1-x_0)^3 > 0$ *und* $(x_1-x_2)^3 < 0$, *dass* a *und* b *verschiedene Vorzeichen haben müssen.*
Mit der Forderung der $\mathbb{C}^1$*-Stetigkeit*

$$f_1'(x_1) = 3a(x_1-x_0)^2 = 3b(x_1-x_2)^2 = f_2'(x_1)$$

folgt wegen $(x_1-x_0)^2 > 0$ *und* $(x_1-x_2)^2 > 0$, *dass* a *und* b *gleiche Vorzeichen haben müssen.*
Das wäre nur mit $a = b = 0$ *möglich, dann wäre jedoch* $f = 0$.
Eine Konstruktion mit dem Träger $[x_0, x_2]$ *ist also* <u>*nicht*</u> *möglich.*
Graphisch läßt sich dies auch gut veranschaulichen !

ii) *Konstruktion auf dem Intervall* $[x_0, x_3]$:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x \in [x_0, x_1] \quad , f_1 \in \Pi_3 \\ f_2(x) & , x \in [x_1, x_2] \quad , f_2 \in \Pi_3 \\ f_3(x) & , x \in [x_2, x_3] \quad , f_3 \in \Pi_3 \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

Analog der vorhergehenden Konstruktion ergibt sich

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a(x-x_0)^3 \\ f_3(x) &= b(x-x_3)^3 \end{aligned}$$

Und als weiteren Ansatz nehmen wir

$$f_2(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3.$$

Mit der $\mathbb{C}^2$*-Stetigkeit an der Stelle* x_1 *erhält man:*

$$\begin{aligned} a(x_1-x_0)^3 &= c_0x_1^3 + c_1x_1^2 + c_2x_1 + c_3 \\ 2a(x_1-x_0)^2 &= 3c_0x_1^2 + 2c_1x_1 + c_2 \\ 6a(x_1-x_0) &= 6c_0x_1 + 2c_1 \end{aligned}$$

Und mit der $\mathbb{C}^2$*-Stetigkeit an der Stelle* x_2:

$$\begin{aligned} b(x_2-x_3)^3 &= c_0x_2^3 + c_1x_2^2 + c_2x_2 + c_3 \\ 2a(x_2-x_3)^2 &= 3c_0x_2^2 + 2c_1x_2 + c_2 \\ 6a(x_2-x_3) &= 6c_0x_2 + 2c_1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem für die sechs Unbekannten a, b, c_0, c_1, c_2, c_3 lautet also:

$$\begin{pmatrix} (x_1-x_0)^3 & 0 & -x_1^3 & -x_1^2 & -x_1 & -1 \\ 0 & (x_2-x_3)^3 & -x_2^3 & -x_2^2 & -x_2 & -1 \\ 3(x_1-x_0)^2 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 & -1 & 0 \\ 0 & 3(x_2-x_3)^2 & -3x_2^2 & -2x_2 & -1 & 0 \\ 6(x_1-x_0) & 0 & -6x_1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6(x_2-x_3) & -6x_2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der Matrix linear unabhängig sind, hat die Matrix Rang 6 und wir erhalten den Nullvektor als eindeutige Lösung des homogenen Gleichungssystems mit sechs Unbekannten. Somit gibt es keine solche Funktion f, $f \not\equiv 0$, mit $[x_0, x_3]$ als Träger.

Als minimalen Träger einer solchen Funktion benötigt man also vier Teilintervalle.