Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

16. Oktober 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 1

Präsenzübung

Ü 1 Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ zu den Stützstellen $x_0,\ x_1, \dots,\ x_n$ mit den Stützwerten $y_i := x_i^2 - 3x_i + 2,\ i = 0, 1, \dots, n$ für folgende Fälle:

a) $n = 1,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2,$

b) $n = 1,\ x_0 = 0,\ x_1 = 2,$ (Verwenden Sie die Lagrange–Darstellung)

c) $n = 2,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,$

d) $n = 3,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Ü 2 **Dividierte Differenzen.**
Es wird behauptet, das folgende Schema dividierter Differenzen stamme von einer Funktion, deren sämtliche Ableitungen betragsmässig kleinergleich 1.5 seien. Ist dies plausibel?

i	x_i	$y_i = f_{[x_i]}$	$f_{[x_i,x_{i+1}]}$	$f_{[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]}$	$f_{[x_i,\dots,x_{i+3}]}$	$f_{[x_i,\dots,x_{i+4}]}$
0	0	0	0.9636	-0.7058	0.1094	0.0461
1	1	0.9636	-0.4481	-0.3776	0.2938	
2	2	0.5155	-1.2033	0.5038		
3	3	-0.6878	-0.1957			
4	4	-0.8835				

Ü 3 Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Newton'schen Interpolationspolynoms vom Grad 2 ($p_2(x)$) zwischen den Stützstellen $x_0 = 1, x_1 = 2.25$ und $x_2 = 4$ interpoliert werden. Vergleichen Sie den exakten Interpolationsfehler im Punkt $x = 2$ mit der Fehlerabschätzung aus Satz 1.1.5.

Hausübung

H 1 **Newton-Interpolation** (2 Punkte)
Die Funktion $f(x) = \sin((\pi/2)x)$ soll im Intervall $[0, 1]$ zwischen den Stützstellen

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
f_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

interpoliert werden.

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_3(x)$ aus diesen Daten nach der Newtonschen Darstellung und unter Verwendung des Schemas der dividierten Differenzen.

b) Vergleichen Sie den exakten Fehler $|\sin(\frac{\pi}{4}) - p_3(\frac{1}{2})|$ mit der Fehlerabschätzung für Interpolationspolynome.

H 2 (LAGRANGE-*Polynome*)
Zu den $n + 1$ Interpolationsstützstellen $x_0, \ldots, x_n$, paarweise verschieden, seien die LAGRANGEschen Interpolationspolynome $L_{i,n}(x_j) = \delta_{ij}$ gegeben. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{N}$ so, daß $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_{i,n}(x) = x^k.$$

H 3 *numerische Differentiation mittels Interpolation*
Um die erste Ableitung einer Funktion f in einem Punkt x nur mittels Funktionsauswertungen zu approximieren, kann man mit Hilfe der Interpolation geeignete Formeln, sogenannte Differenzenquotienten, herleiten.

Gegeben sei eine äquidistante Funktionstabelle $x_i = x_0 + ih, \quad f(x_i)$ für festes $h > 0$ und $i = 0, 1, 2, \ldots$. Hieraus möchte man eine Tabelle von Näherungen der ersten Ableitung erstellen, indem man ein Interpolationspolynom niedrigen Grades für benachbarte Punkte aufstellt und dieses differenziert. Hierzu hat man verschiedene Möglichkeiten die Gitterpunkte relativ zum Auswertungspunkt anzuordnen. Für manche Anwendungen benötigt man die Ableitung am jeweiligen (Teil)gitterende und dies soll hier untersucht werden.

Um also die Ableitung von f im Punkt x_{i-1} zu approximieren, interpoliere man f in den Stützstellen x_{i-1}, x_i, x_{i+1} und bestimme die Ableitung des Interpolationspolynoms in x_{i-1}. Welche Formel ergibt sich und wie hängt der Fehler der Approximation von h ab ?

Hinweis: Es gilt folgende allgemeine Fehlerabschätzung für die erste Ableitung eines Interpolationspolynoms vom Grad n zu $x_0, \ldots, x_n$

$$f'(x) - p_n'(x) = \frac{f^{(n+2)}(\bar{\xi}(x))}{(n+2)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\tilde{\xi}(x))}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right),$$

wobei $\bar{\xi}$ und $\tilde{\xi}$ aus dem Intervall $[a, b]$ sind.

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 1, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 1 Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ zu den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit den Stützwerten $y_i := x_i^2 - 3x_i + 2,\ i = 0, 1, \ldots, n$ für folgende Fälle:

a) $n = 1,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2,$

b) $n = 1,\ x_0 = 0,\ x_1 = 2,$ (Verwenden Sie die Lagrange–Darstellung)

c) $n = 2,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,$

d) $n = 3,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

a) $n = 1,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2 \ \Rightarrow\ y_0 = 0,\ y_1 = 0$
p_1 ist also eine lineare Funktion mit zwei Nullstellen.
$\Longrightarrow\ p_1(x) \equiv 0.$

b) $n = 1,\ x_0 = 0, x_1 = 2 \ \Rightarrow\ y_0 = 2,\ y_1 = 0$
Aus der Lagrange-Darstellung folgt:

$$p_1(x) = y_0\ L_0(x) + y_1\ L_1(x) = 2\ \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + 0\ \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 2 - x$$

c) $n = 2,\ x_0 = 0, x_1 = 1,\ x_2 = 2 \ \Rightarrow\ y_0 = 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0$
Die Stützwerte y_i sind durch das quadratische Polynom $p(x) = x^2 - 3x + 2$ vorgegeben. Dieses Polynom p erfüllt also die Interpolationsbedingungen

$$p(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2$$

per definitionem.
Außerdem ist p ein Polynom von Höchstgrad 2.
Wegen der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms (Satz 1.1.1) folgt:

$$p_2(x) = p(x) = x^2 - 3x + 2.$$

d) $n = 3,\ x_0 = 0, x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3 \ \Rightarrow\ y_0 = 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 2$
$p(x) = x^2 - 3x + 2$ erfüllt auch in diesem Fall die Interpolationsbedingungen und ist als quadratisches Polynom ein Polynom vom Höchstgrad 3.
Wegen der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms (Satz 1.1.1) gilt auch hier:

$$p_3(x) = p(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Ü 2 **Dividierte Differenzen.**
Es wird behauptet, das folgende Schema dividierter Differenzen stamme von einer Funktion, deren sämtliche Ableitungen betragsmässig kleinergleich 1.5 seien. Ist dies plausibel?

i	x_i	$y_i = f_{[x_i]}$	$f_{[x_i,x_{i+1}]}$	$f_{[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]}$	$f_{[x_i,\ldots,x_{i+3}]}$	$f_{[x_i,\ldots,x_{i+4}]}$
0	0	0	0.9636	-0.7058	0.1094	0.0461
1	1	0.9636	-0.4481	-0.3776	0.2938	
2	2	0.5155	-1.2033	0.5038		
3	3	-0.6878	-0.1957			
4	4	-0.8835				

Zwischen den dividierten Differenzen und den Ableitungen einer Funktion besteht der Zusammenhang

$$f_{[x_i,\dots,x_{i+k}]} = \frac{f^{(k)}(\xi_{i,k})}{k!}$$

Um also die Plausibilität dieser Behauptung zu prüfen genügt es, die Werte der Spalte $k = 0, 1, \dots$ *mit* $k!$ *zu multiplizieren. Offenbar ergibt sich in Spalte 3 ein Widerspruch. (Die Daten stammen von der Funktion* $\sin(1.3x)$*)*

Ü 3 Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Newton'schen Interpolationspolynoms vom Grad 2 ($p_2(x)$) zwischen den Stützstellen $x_0 = 1, x_1 = 2.25$ und $x_2 = 4$ interpoliert werden. Vergleichen Sie den exakten Interpolationsfehler im Punkt $x = 2$ mit der Fehlerabschätzung aus Satz 1.1.5.

Die Tabelle der Interpolationspunkte lautet

i	0	1	2
x_i	1	2.25	4
y_i	1	1.5	2

Das Schema der dividierten Differenzen ergibt folglich

i	x_i	$y_i = f_{[x_i]}$	$f_{[x_i,x_{i+1}]}$	$f_{[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]}$
0	1	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{105}$
1	2.25	1.5	$\frac{2}{7}$	
2	4	2		

Das Interpolationspolynom lautet demnach

$$p_2(x) = 1 + \frac{2}{5}(x-1) - \frac{4}{105}(x-1)(x-2.25).$$

Der exakte Interpolationsfehler im Punkt $x = 2$ *beträgt* $|\sqrt{2} - p_2(2)| = |1.4142 - 1.409523| = .00469$ *Die Fehlerabschätzung liefert wegen der Monotonie der 3. Ableitung (*$f^{(3)}(x) = -\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$*)*

$$\begin{aligned} |f(x) - p_2(x)| &\leq \tfrac{1}{3!} \max_{\xi\in[1,4]} |f^{(3)}(\xi)||(x-1)(x-2.25)(x-4)| \\ |f(2) - p_2(2)| &\leq \tfrac{1}{3!}|f^{(3)}(1)||(2-1)(2-2.25)(2-4)| \\ &= \tfrac{1}{32} \end{aligned}$$

Wegen der ungünstigen Schätzung für die Ableitung haben wir eine grobe Überschätzung des tatsächlichen Fehlers.

Hausübung

H 1 Newton-Interpolation (2 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \sin((\pi/2)x)$ soll im Intervall $[0,1]$ zwischen den Stützstellen

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
f_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

interpoliert werden.

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_3(x)$ aus diesen Daten nach der Newtonschen Darstellung und unter Verwendung des Schemas der dividierten Differenzen.

b) Vergleichen Sie den exakten Fehler $|\sin(\frac{\pi}{4}) - p_3(\frac{1}{2})|$ mit der Fehlerabschätzung für Interpolationspolynome.

a) *Die dividierten Differenzen lauten*

i	x_i	$f_i = f_{[x_i]}$	$f_{[x_i,x_{i+1}]}$	$f_{[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]}$	$f_{[x_i,\ldots,x_{i+3}]}$
0	*0*	*0*	*1.5*	*-0.6029*	*-0.4413*
1	*1/3*	*1/2*	*1.0981*	*-1.0442*	
2	*2/3*	*0.8860*	*0.4019*		
3	*1*	*1*			

Das Interpolationspolynom 3. Grades lautet

$$p_3(x) \quad = \quad \tfrac{3}{2}x - 0.6029x(x-\tfrac{1}{3}) - 0.4413x(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{2}{3})$$

b) *Der exakte Fehler im Punkt* $x = \frac{1}{2}$ *ist gegeben durch* $|\sin(\frac{\pi}{4}) - p_3(\frac{1}{2})| = |\frac{1}{\sqrt{2}} - 0.7059| = 0.0012$. *Aus der Fehlerdarstellung für die Polynominterpolation ergibt sich*

$$\begin{aligned} |f(x) - p_3(x)| &\leq \tfrac{\max|f^{(4)}|}{4!} |\textstyle\prod_{j=0}^{3}(x-x_j)| \\ &= \tfrac{1}{4!}(\tfrac{\pi}{2})^4 |(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{2}-1)| \\ &= 0.0018 \end{aligned}$$

Hier ist die Fehlerabschätzung also durchaus realistisch.

H 2 (LAGRANGE-*Polynome*)

Zu den $n+1$ Interpolationsstützstellen $x_0, \ldots, x_n$, paarweise verschieden, seien die LAGRANGEschen Interpolationspolynome $L_{i,n}(x_j) = \delta_{ij}$ gegeben. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{N}$ so, daß $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_{i,n}(x) = x^k.$$

Sei $k \leq n$. Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^k$ und konstruiere das Lagrangesche Interpolationspolynom $L(x)$ für diese Funktion mit den gegebenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n$:

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x) = \sum_{j=0}^{n} x_i^k \, L_j(x).$$

Andererseits ist das Polynom p_k mit $p_k(x) = x^k$ auch ein Interpolationspolynom für die Funktion f mit den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$:

$$p \text{ ist vom Grad } k \leq n \text{ und } p_k(x_j) = x_j^k = f(x_j), \; j = 0, \dots, n.$$

Da aber die Interpolationsaufgabe **e**indeutig *lösbar ist, gilt $L(x) \equiv p_k(x) = x^k$.*
Somit ist die Gleichung für alle $0 \leq k \leq n$ erfüllt.

Für $k > n$ kann die Gleichung nicht erfüllt sein, da $L(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ und x^k ein Polynom vom Grad $> n$ ist.

Damit gilt: die gegebene Gleichung ist für und nur für $0 \leq k \leq n$ erfüllt.

H 3 *numerische Differentiation mittels Interpolation*

Um die erste Ableitung einer Funktion f in einem Punkt x nur mittels Funktionsauswertungen zu approximieren, kann man mit Hilfe der Interpolation geeignete Formeln, sogenannte Differenzenquotienten, herleiten.

Gegeben sei eine äquidistante Funktionstabelle $x_i = x_0 + ih, \quad f(x_i)$ für festes $h > 0$ und $i = 0, 1, 2, \dots$. Hieraus möchte man eine Tabelle von Näherungen der ersten Ableitung erstellen, indem man ein Interpolationspolynom niedrigen Grades für benachbarte Punkte aufstellt und dieses differenziert. Hierzu hat man verschiedene Möglichkeiten die Gitterpunkte relativ zum Auswertungspunkt anzuordnen. Für manche Anwendungen benötigt man die Ableitung am jeweiligen (Teil)gitterende und dies soll hier untersucht werden.

Um also die Ableitung von f im Punkt x_{i-1} zu approximieren, interpoliere man f in den Stützstellen x_{i-1}, x_i, x_{i+1} und bestimme die Ableitung des Interpolationspolynoms in x_{i-1}. Welche Formel ergibt sich und wie hängt der Fehler der Approximation von h ab ?

Hinweis: Es gilt folgende allgemeine Fehlerabschätzung für die erste Ableitung eines Interpolationspolynoms vom Grad n zu $x_0, \dots, x_n$

$$f'(x) - p_n'(x) = \frac{f^{(n+2)}(\bar{\xi}(x))}{(n+2)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\tilde{\xi}(x))}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right),$$

wobei $\bar{\xi}$ und $\tilde{\xi}$ aus dem Intervall $[a, b]$ sind.

Zur Interpolation stehen die Daten

x_{i-1}	x_i	x_{i+1}
$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$

zur Verfügung. Das Interpolationspolynom nach Lagrange lautet

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(x_{i-1})\tfrac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\tfrac{x-x_{i+1}}{x_{i-1}-x_{i+1}} \\ &+ f(x_i)\tfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\tfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \\ &+ f(x_{i+1})\tfrac{x-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}\tfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \end{aligned}$$

Unter Verwendung von der Äquidistanz der Stützstellen ergibt sich die einfache Form

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \tfrac{f(x_{i-1})}{2h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1}) \\ &- \tfrac{f(x_i)}{h^2}(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \\ &+ \tfrac{f(x_{i+1})}{2h^2}(x-x_{i-1})(x-x_i) \end{aligned}$$

Die Ableitung lautet

$$\begin{aligned} p_2'(x) &= \tfrac{f(x_{i-1})}{2h^2}((x-x_i)+(x-x_{i+1})) \\ &- \tfrac{f(x_i)}{h^2}((x-x_{i-1})+(x-x_{i+1})) \\ &+ \tfrac{f(x_{i+1})}{2h^2}((x-x_{i-1})+(x-x_i)) \end{aligned}$$

und die Punktauswertung in x_{i-1} *ist*

$$p_2'(x_{i-1}) = \frac{f(x_{i-1})}{2h^2}(-3h) - \frac{f(x_i)}{h^2}(-2h) + \frac{f(x_{i+1})}{2h^2}(-h) = \frac{-3f(x_{i-1})+4f(x_i)-f(x_{i+1})}{2h}.$$

Mit der Fehlerabschätzung aus dem Hinweis

$$f'(x) - p_n'(x) = \frac{f^{(n+2)}(\bar\xi(x))}{(n+2)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\tilde\xi(x))}{(n+1)!}\frac{d}{dx}\left(\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right)$$

ergibt sich durch Einsetzen von $n=2$ *und* $x=x_i$ *und mit den Annahmen*

$$\left|\frac{f^{(n+2)}(\bar\xi(x))}{(n+2)!}\right| \le M_{n+2}\ , \quad \left|\frac{f^{(n+1)}(\tilde\xi(x))}{(n+1)!}\right| \le M_{n+1}$$

daß

$$\begin{aligned} |f'(x_i) - p_2'(x_i)| &\le M_{n+2}\underbrace{\left|\prod_{j=i-1}^{i+1}(x_{i-1}-x_j)\right|}_{=0} + M_{n+1}\underbrace{|(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})|}_{=h^2} \\ &= 2M_{n+1}h^2. \end{aligned}$$

Der Fehler der Approximation verschwindet also quadratisch, wenn h *gegen 0 geht.*