Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28. Januar 2008

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 14

Präsenzübung

Ü 45 Gegeben sei das parabolische Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) &= f(x) && \text{für } x \in [0,1] \\ u(0,t) &= \phi(t) && \text{für } t \in [0,T] \\ u_x(1,t) &= \psi(t) && \text{für } t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Das Problem soll mit dem Crank-Nicholson-Verfahren gelöst werden, wobei aber die Gitterpunkte so zu legen sind, daß $x = 1$ genau in der Mitte zwischen den beiden äußersten Gitterpunkten liegt, damit die rechte Randbedingung von zweiter Ordnung approximiert werden kann, während $x = 0$ der äusserste linke Gitterpunkt bleiben soll.

a) Wie ist die Raumschrittweite h in Abhängigkeit von M zu wählen, wenn M die Anzahl der unbekannten Knotenwerte bezeichnet?

b) Stellen Sie das entstehende Gleichungssystem analog zu der Darstellung im Skript auf und zeigen Sie, daß es eindeutig lösbar ist.

Ü 46 Sei

$$u_t = au_x, \quad a > 0.$$

Diskretisieren Sie diese hyperbolische DGL mit konstantem Koeffizienten a wie folgt:

$$u_t(x_j, t_k) \approx \frac{1}{\tau}\left(u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)\right)$$

und

$$\begin{aligned} u_x(x_j, t_k) &\approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_{j+1}, t_k) - u(x_j, t_k)\right) \quad \text{bzw.} \\ u_x(x_j, t_k) &\approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_j, t_k) - u(x_{j-1}, t_k)\right). \end{aligned}$$

a) Wie lautet die Lösung der DGL, wenn $g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ die Anfangsdaten sind?

b) Wie sehen die Differenzensterne der beiden Diskretisierungen aus?

c) Wie sind τ und h und der Differenzenstern zu wählen, damit die CFL-Bedingung erfüllt ist?

d) Für welche Wahl von τ und h liefert die Approximation die exakte Lösung?

Ü 47 Die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{x,x} \quad \text{für} \quad 0 < x < 1\,,\ t > 0 \\ u(x,0) &= x^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) &= 0 \quad \text{für} \quad t \geq 0 \\ u(1,t) &= 1 \quad \text{für} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

soll mit der Standard-Semidiskretisierung gelöst werden unter Verwendung des Integrators zweiter Ordnung

$$3y^h_{n+1} - 4y^h_n + y^h_{n-1} \;=\; 2hf(t_{n+1}, y^h_{n+1}),\;\; h \;=\; \text{Zeitschrittweite}$$

für eine DGL 1. Ordnung

$$y' \;=\; f(t,y)$$

Wie lautet das lineare Gleichungssystem für eine allgemeine Zeitschicht bei konstanter Zeitschrittweite und konstanter Raumschrittweite?

Hausübung

H 45 Gegeben sei das parabolische Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) &= f(x) && \text{für } x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 && \text{für } t \in [0,T], \end{aligned}$$

mit $f(0) = f(1) = 0$.

a) Diskretisieren Sie die vorliegende Differentialgleichung bezüglich der Ortsvariablen x. Man erhält ein Anfangswertproblem für die Funktion $u_j^h(t) \approx u(x_j, t)$.

b) Wenden Sie das implizite Euler-Verfahren zur Zeitintegration des in a) gefundenen AWP an. Wie lautet die Berechnungsvorschrift für $u_{k+1}^{h,\tau}$ komponentenweise und welcher Differenzenstern ergibt sich ?

H 46 Das hyperbolische Anfangsrandwertproblem

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{für} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T),$$

mit den Anfangswerten

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(\pi x) \\ u_t(x,0) &= \cos(\pi x) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad x \in [0,1]$$

und den Randwerten

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(1,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad t \in [0,T].$$

soll nach der Linienmethode näherungsweise gelöst werden.

a) Semidiskretisieren Sie zunächst die Differentialgleichung bezüglich der Ortsvariablen x. Dabei entsteht eine Anfangswertaufgabe gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung.

b) Wenden Sie das Integrationsverfahren von Störmer

$$\text{DGL: } y'' = f(t,y) \; : \; y_{n+1}^h - 2y_n^h + y_{n-1}^h = h^2 f(t, y_n^h)$$

auf die Anfangswertaufgabe aus a) an. Wie lautet die Berechnungsvorschrift für $\vec{u}_{k+1}^{h,\tau}$, die neue Zeitschicht, komponentenweise ? Wie sieht der Differenzenstern aus ?

Hinweis: Betrachten Sie nur den allgemeinen Schritt auf die Zeitschicht $k+1$.

H 47 a) Wir betrachten das System von Advektionsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \partial_x u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $u : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ und $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A und entkoppeln Sie das System, indem Sie die Matrix A diagonalisieren.

b) Verifizieren Sie, daß durch $v(x,t) = v_0(x + at)$, $a > 0$ eine Lösung der skalaren Advektionsgleichung

$$\partial_t v(x,t) = a\partial_x v(x,t), \qquad v(x,0) = v_0(x), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

gegeben ist. Zeigen Sie außerdem, daß $v(x,t)$ entlang der Geraden $x + at = c, c \in \mathbb{R}$, konstant ist.

c) Gegeben seien eine Diskretisierung $x_i = i \cdot \Delta x, i \in \mathbb{Z}$, $t_j = j \cdot \Delta t, j \in \mathbb{N}$ und das sogenannte Up-Wind-Verfahren

$$v^h(x_i, t_j) = v^h(x_i, t_{j-1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x} a(v^h(x_{i+1}, t_{j-1}) - v^h(x_i, t_{j-1})).$$

Es sei $v^h(x_{i_0}, t_{j_0})$ ein fester mit diesem Verfahren berechneter Näherungswert. Bestimmen Sie das Intervall $[x_l, x_r]$, in dem die Anfangswerte $v_0(x_i)$ liegen, von denen $v^h(x_{i_0}, t_{j_0})$ abhängt.

d) Der Wert der exakten Lösung $v(x_{i_0}, t_{j_0})$ hängt nur von dem Wert $v_0(x_{i_0} + at_{j_0})$ ab. Wie müssen Δx und Δt gewählt werden, damit $x_{i_0} + at_{j_0}$ in dem im Aufgabenteil c) bestimmten Intervall liegt? Wie müssen Δx und Δt im Fall des Systems aus Aufgabenteil a) gewählt werden?

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 14, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 45 Gegeben sei das parabolische Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) &= f(x) && \text{für } x \in [0,1] \\ u(0,t) &= \phi(t) && \text{für } t \in [0,T] \\ u_x(1,t) &= \psi(t) && \text{für } t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Das Problem soll mit dem Crank-Nicholson-Verfahren gelöst werden, wobei aber die Gitterpunkte so zu legen sind, daß $x = 1$ genau in der Mitte zwischen den beiden äußersten Gitterpunkten liegt, damit die rechte Randbedingung von zweiter Ordnung approximiert werden kann, während $x = 0$ der äusserste linke Gitterpunkt bleiben soll.

a) Wie ist die Raumschrittweite h in Abhängigkeit von M zu wählen, wenn M die Anzahl der unbekannten Knotenwerte bezeichnet?

b) Stellen Sie das entstehende Gleichungssystem analog zu der Darstellung im Skript auf und zeigen Sie, daß es eindeutig lösbar ist.

a) *Die Schrittweite h kann gewählt werden als $h = \frac{2}{2M-1}$.*

b) *Die Diskretisierung im Ort ergibt für $j = 1, \dots, M-1$*

$$\frac{d}{dt} u_j^h(t) = \frac{1}{h^2} \left(u_{j-1}^h(t) - 2u_j^h(t) + u_{j+1}^h(t) \right).$$

Zusätzlich gilt am linken Rand

$$u_0^h(t) = \phi(t)$$

und am rechten Rand

$$\frac{1}{h} \left((u_M^h(t) - u_{M-1}^h(t) \right) = \psi(t) \quad \Leftrightarrow \quad u_M^h(t) = h \cdot \psi(t) + u_{M-1}^h(t).$$

Damit ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt} u^h(t) = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} u^h(t) + \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \phi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h \cdot \psi(t) \end{pmatrix},$$

mit den Anfangswerten

$$u^h(0) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt

$$u^h(t) = \begin{pmatrix} u_1^h(t) \\ \vdots \\ u_{M-1}^h(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u(x_1, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung der Trapezregel zur Zeitintegration mit der Zeitschrittweite τ liefert schließlich das Gleichungssystem

$$(I - \frac{\tau}{2h^2}A)u_{k+1}^{h,\tau} = (I + \frac{\tau}{2h^2}A)u_k^{h,\tau} + \frac{\tau}{h^2}g_k.$$

Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad und \quad g_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\phi(t_k) + \phi(t_{k+1})) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{h}{2}(\psi(t_k) + \psi(t_{k+1})) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $(I - \frac{\tau}{2h^2}A)$ ist irreduzibel diagonaldominant und somit regulär.

Ü 46 Sei

$$u_t = au_x, \quad a > 0.$$

Diskretisieren Sie diese hyperbolische DGL mit konstantem Koeffizienten a wie folgt:

$$u_t(x_j, t_k) \approx \frac{1}{\tau}\left(u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)\right)$$

und

$$\begin{aligned} u_x(x_j, t_k) &\approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_{j+1}, t_k) - u(x_j, t_k)\right) \quad \text{bzw.} \\ u_x(x_j, t_k) &\approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_j, t_k) - u(x_{j-1}, t_k)\right). \end{aligned}$$

a) Wie lautet die Lösung der DGL, wenn $g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ die Anfangsdaten sind?

b) Wie sehen die Differenzensterne der beiden Diskretisierungen aus?

c) Wie sind τ und h und der Differenzenstern zu wählen, damit die CFL-Bedingung erfüllt ist?

d) Für welche Wahl von τ und h liefert die Approximation die exakte Lösung?

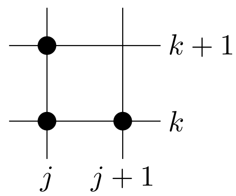
a) *Die exakte Lösung lautet*

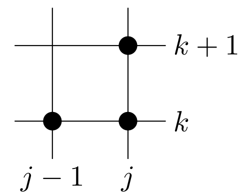
$$u(x, t) = g(x + at).$$

b) *Die beiden Differenzenapproximationen lauten*

$$\begin{aligned} u_{j,k+1}^{h,\tau} &= u_{j,k}^{h,\tau} + a\tfrac{\tau}{h}\left(u_{j+1,k}^{h,\tau} - u_{j,k}^{h,\tau}\right), \quad \text{bzw.} \\ u_{j,k+1}^{h,\tau} &= u_{j,k}^{h,\tau} + a\tfrac{\tau}{h}\left(u_{j,k}^{h,\tau} - u_{j-1,k}^{h,\tau}\right). \end{aligned}$$

Die Differenzensterne sind





c) *Die CFL-Bedingung ist erfüllt, wenn der numerische Abhängigkeitsbereich den analytischen Abhängigheitsbereich der Lösung einschließt. Aus dem Aufgabenteil a) wissen wir aber, das die Lösung auf den Geraden $x = x_0 - at$ konstant ist. Man nennt diese Geraden die Charakteristiken der DGL. Der analytische Abhängigkeitsbereich der Lösung in einem Gitterpunkt (x_j, t_k) ist also der Punkt auf der x-Achse, der auf der Charakteristik liegt, die durch (x_j, t_k) verläuft. Der numerische Abhängigkeitsbereich ist die Menge aller Gitterpunkte auf der x-Achse, die zur Bestimmung der Approximation in(x_j, t_k) beitragen.*

Aus diesem Grunde ist das zweite Differenzenschema aus b) ungeeignet, da $a > 0$ gilt. Das erste Schema kann nur verwendet werden, wenn

$$a\frac{\tau}{h} \leq 1$$

gilt.

d) *Wählt man sogar $\frac{h}{\tau} = a$, dann ergibt sich in der ersten Differenzengleichung aus b)*

$$u_{j,k+1}^{h,\tau} = u_{j,k}^{h,\tau} + \left(u_{j+1,k}^{h,\tau} - u_{j,k}^{h,\tau}\right) = u_{j+1,k}^{h,\tau}.$$

Damit ist die Lösung exakt.

Ü 47 Die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{x,x} \quad \text{für} \quad 0 < x < 1\,,\; t > 0 \\ u(x,0) &= x^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) &= 0 \quad \text{für} \quad t \geq 0 \\ u(1,t) &= 1 \quad \text{für} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

soll mit der Standard-Semidiskretisierung gelöst werden unter Verwendung des Integrators zweiter Ordnung

$$3y_{n+1}^h - 4y_n^h + y_{n-1}^h \;=\; 2hf(t_{n+1}, y_{n+1}^h),\;\; h \;=\; \text{Zeitschrittweite}$$

für eine DGL 1. Ordnung

$$y' \;=\; f(t,y)$$

Wie lautet das lineare Gleichungssystem für eine allgemeine Zeitschicht bei konstanter Zeitschrittweite und konstanter Raumschrittweite?

Die Semidiskretisierung liefert die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\vec{u}' \;=\; \frac{k}{(\Delta\, x)^2}\Big(tridiag(1,-2,1)\vec{u} + (0,\ldots,0,1)^T\Big)$$

Anwendung des Integrators ergibt dann das lineare Gleichungssystem

$$(3I - 2\frac{k\Delta\, t}{(\Delta\, x)^2}\,\mathrm{tridiag}(1,-2,1))\vec{u}^{n+1} \;=\; 4\vec{u}^n - \vec{u}^{n-1} + 2\frac{k\Delta\, t}{(\Delta\, x)^2}(0,\ldots,0,1)^T$$

Die Matrix dieses Gleichungssystems ist eine symmetrische strikt diagonaldominante L-Matrix, daher eine M-Matrix und positiv definit.

Hausübung

H 45 Gegeben sei das parabolische Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) &= f(x) && \text{für } x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 && \text{für } t \in [0,T], \end{aligned}$$

mit $f(0) = f(1) = 0$.

a) Diskretisieren Sie die vorliegende Differentialgleichung bezüglich der Ortsvariablen x. Man erhält ein Anfangswertproblem für die Funktion $u_j^h(t) \approx u(x_j, t)$.

b) Wenden Sie das implizite Euler-Verfahren zur Zeitintegration des in a) gefundenen AWP an. Wie lautet die Berechnungsvorschrift für $u_{k+1}^{h,\tau}$ komponentenweise und welcher Differenzenstern ergibt sich ?

a) *In der Ortsvariable wird das Gitter $x_j = h \cdot j$ für $j = 0, \ldots, M$ mit $h = \frac{1}{M}$. Im Punkt (x_j, t) kann man deshalb diskretisieren*

$$u_t(x_j, t) = \frac{1}{h^2}\left(u(x_{j-1}, t) - 2u(x_j, t) + u(x_{j+1}, t)\right) + \mathcal{O}(h^2).$$

Vernachlässigung des Diskretisierungsfehlers $\mathcal{O}(h^2)$ und Einführung der Vektornotation

$$\vec{u}^h(t) = \begin{pmatrix} u_1^h(t) \\ \vdots \\ u_{M-1}^h(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u(x_1, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{pmatrix}$$

führt auf das AWP

$$\frac{d}{dt}\vec{u}^h(t) = \frac{1}{h^2} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:A} \vec{u}^h(t) \quad \text{mit } \vec{u}^h(0) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \end{pmatrix}.$$

b) *Das implizite Euler-Verfahren mit der Schrittweite τ liefert in jedem Zeitschritt das Gleichungssystem*

$$\vec{u}_{k+1}^{h,\tau} = \vec{u}_k^{h,\tau} + \tau A \vec{u}_{k+1}^{h,\tau}, \quad \text{mit } \vec{u}_0^{h,\tau} = \vec{u}^h(0) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \end{pmatrix}.$$

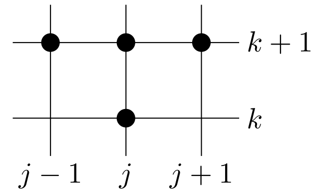
Damit ist in jedem Schritt das Gleichungssystem

$$(I - \frac{\tau}{h^2} A)\vec{u}_{k+1}^{h,\tau} = \vec{u}_k^{h,\tau}$$

zu lösen. Komponentenweise bedeutet das

$$\frac{1}{\tau}\left((u_{k+1}^{h,\tau})_j - (u_k^{h,\tau})_j\right) = \frac{1}{h^2}\left((u_{k+1}^{h,\tau})_{j-1} - 2(u_{k+1}^{h,\tau})_j + (u_{k+1}^{h,\tau})_{j+1}\right).$$

Der Differenzenstern zu dieser Gleichung ist



H 46 Das hyperbolische Anfangsrandwertproblem

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{für} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T),$$

mit den Anfangswerten

$$\left.\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & \sin(\pi x) \\ u_t(x,0) & = & \cos(\pi x) \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad x \in [0,1]$$

und den Randwerten

$$\left.\begin{array}{rcl} u(0,t) & = & 0 \\ u(1,t) & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad t \in [0,T].$$

soll nach der Linienmethode näherungsweise gelöst werden.

a) Semidiskretisieren Sie zunächst die Differentialgleichung bezüglich der Ortsvariablen x. Dabei entsteht eine Anfangswertaufgabe gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung.

b) Wenden Sie das Integrationsverfahren von Störmer

$$\text{DGL: } y'' \;=\; f(t,y) \;:\; y^h_{n+1} - 2y^h_n + y^h_{n-1} \;=\; h^2 f(t, y^h_n)$$

auf die Anfangswertaufgabe aus a) an. Wie lautet die Berechnungsvorschrift für $\vec{u}^{h,\tau}_{k+1}$, die neue Zeitschicht, komponentenweise ? Wie sieht der Differenzenstern aus ?
Hinweis: Betrachten Sie nur den allgemeinen Schritt auf die Zeitschicht $k+1$.

a) *Das Ortsgitter ist gegeben durch $x_i = \frac{1}{h}$ für $i = 0, 1, \ldots, M$ und $h = \frac{1}{M}$. Die Ortsdiskretisierung wird, wie bei zweiten Ableitungen üblich, mit dem zweiten Differenzenquotienten vorgenommen. Es ergibt sich*

$$u_{tt}(x_i, t) = \frac{1}{h^2}\left(u(x_{j-1}, t) - 2u(x_j, y) + u(x_{j+1}, t)\right) + \mathcal{O}(h^2).$$

Das führt auf der System 2. Ordnung

$$\ddot{\vec{u}}^h(t) = -\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u}^h(t) + \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit den Anfangswerten

$$\vec{u}^h(0) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x_1) \\ \sin(\pi x_2) \\ \vdots \\ \sin(\pi x_{M-1}) \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \dot{\vec{u}}^h(0) = \begin{pmatrix} \cos(\pi x_1) \\ \cos(\pi x_2) \\ \vdots \\ \cos(\pi x_{M-1}) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\vec{u}^h = (u^h_1, \ldots, u^h_{M-1})^T$.

b) *Mit der Zeitschrittweite τ ergibt sich mit dem Störmer-Verfahren*

$$\vec{u}_{k+1}^{h,\tau} = 2\vec{u}_k^{h,\tau} - \vec{u}_{k-1}^{h,\tau} + \frac{\tau^2}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & +1 & & \\ +1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & +1 \\ & & +1 & -2 \end{pmatrix}\vec{u}_k^{h,\tau}.$$

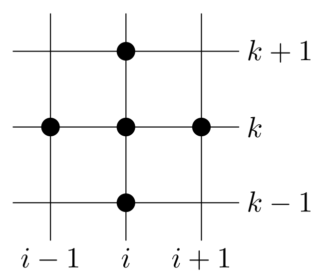
Komponentenweise lautet die Vorschrift damit

$$(u_{k+1}^{h,\tau})_i = 2(1-\frac{\tau^2}{h^2})(u_k^{h,\tau})_i - (u_{k-1}^{h,\tau})_i + \frac{\tau^2}{h^2}\left((u_k^{h,\tau})_{i-1} + (u_k^{h,\tau})_{i+1}\right),$$

bzw.

$$\frac{(u_{k+1}^{h,\tau})_i - 2(u_k^{h,\tau})_i - (u_{k-1}^{h,\tau})_i}{\tau^2} = \frac{(u_k^{h,\tau})_{i+1} - 2(u_k^{h,\tau})_i - (u_k^{h,\tau})_{i-1}}{h^2}.$$

Der Differenzenstern zu dieser Gleichung ist



H 47 a) Wir betrachten das System von Advektionsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \partial_x u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $u : \mathbb{R}\times(0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ und $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A und entkoppeln Sie das System, indem Sie die Matrix A diagonalisieren.

b) Verifizieren Sie, daß durch $v(x,t) = v_0(x+at)$, $a > 0$ eine Lösung der skalaren Advektionsgleichung

$$\partial_t v(x,t) = a\partial_x v(x,t), \qquad v(x,0) = v_0(x), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$$

gegeben ist. Zeigen Sie außerdem, daß $v(x,t)$ entlang der Geraden $x + at = c, c \in \mathbb{R}$, konstant ist.

c) Gegeben seien eine Diskretisierung $x_i = i\cdot\Delta x, i \in \mathbb{Z}$, $t_j = j\cdot\Delta t, j \in \mathbb{N}$ und das sogenannte Up-Wind-Verfahren

$$v^h(x_i,t_j) = v^h(x_i,t_{j-1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x}a(v^h(x_{i+1},t_{j-1}) - v^h(x_i,t_{j-1})).$$

Es sei $v^h(x_{i_0},t_{j_0})$ ein fester mit diesem Verfahren berechneter Näherungswert. Bestimmen Sie das Intervall $[x_l,x_r]$, in dem die Anfangswerte $v_0(x_i)$ liegen, von denen $v^h(x_{i_0},t_{j_0})$ abhängt.

d) Der Wert der exakten Lösung $v(x_{i_0}, t_{j_0})$ hängt nur von dem Wert $v_0(x_{i_0} + at_{j_0})$ ab. Wie müssen Δx und Δt gewählt werden, damit $x_{i_0}+at_{j_0}$ in dem im Aufgabenteil c) bestimmten Intervall liegt? Wie müssen Δx und Δt im Fall des Systems aus Aufgabenteil a) gewählt werden?

a) *Die Eigenwerte der Matrix A sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind*

$$x_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:S}.$$

Setzt man nun

$$v(x,t) = Su(x,t)$$

und multipliziert das Gleichungssystem mit S^{-1}, so erhält man das äquivalente entkoppelte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \partial_t v_1(x,t) \\ \partial_t v_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x v_1(x,t) \\ \partial_x v_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\partial_x v(x,t) \\ \partial_x v(x,t) \end{pmatrix}.$$

b) *Man erhält durch einfaches Ausrechnen:*

$$\begin{aligned} \partial_t v(x,t) &= a v_0'(x+at) = a\partial_x v(x,t), \\ v(x,0) &= v_0(x). \end{aligned}$$

Wegen der speziellen Form $v(x,t) = v_0(x+at)$ gilt für alle (x,t), für die die Geradengleichung $x + at = c$ mit einem festen $c \in \mathbb{R}$ gilt, daß

$$v(x,t) = v_0(x+at) = v_0(c) = konst.$$

D.h., $v(x,t)$ ist konstant entlang dieser Geraden, der sogenannten Charakteristiken.

c) *$v^h(x_{i_0}, t_{j_0})$ wird aus $v^h(x_{i_0}, t_{j_0-1})$ und $v^h(x_{i_0+1}, t_{j_0-1})$ berechnet, durch Rekursion erhält man als numerischen Abhängigkeitsbereich von $v^h(x_{i_0}, t_{j_0})$ das Intervall $[x_{i_0}, x_{i_0+j_0}]$.*

d) *Es muß $x_{i_0} + at_{j_0} \in [x_{i_0}, x_{i_0+j_0}]$ gelten. Wegen $x_{i_0+j_0} = x_{i_0} + j_o \cdot \Delta x$ und $t_{j_0} = j_0 \cdot \Delta t$ ist dies äquivalent zu*

$$0 \le aj_0 \cdot \Delta t \le j_0 \cdot \Delta x \Leftrightarrow 0 \le a\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1.$$

(An dieser Stelle ist es wichtig, daß $a > 0$ gilt.)

Diese Bedingung ist gerade die CFL-Bedingung, die besagt, daß das numerische Abhängigkeitsintervall das durch die Charakteristiken bestimmte analytische Abhängigkeitsintervall umfassen muß.

Bei den beiden skalaren Gleichungen des entkoppelten Systems ist $a = 1$ bzw. $a = 3$. Damit für beide Werte von a die CFL-Bedingung erfüllt ist, muß somit $\frac{\Delta t}{\Delta x} \le \frac{1}{3}$ gelten.