Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21. Januar 2008

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 13

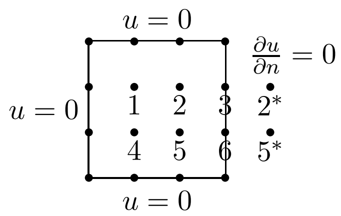
Präsenzübung

Ü 42 2D-Dirichlet-Neumann-Problem

Das gemischte Dirichlet-Neumann-Problem auf dem Gebiet $G = [0,1] \times [0,1]$,

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x,y) & = & f(x,y), & (x,y) \in G, \\ u(x,0) & = & 0, & \\ u(0,y) & = & 0, & \\ u(x,1) & = & 0, & \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & 0, & (x,y) \in \{(x,y) | x = 1\} \end{array}$$

soll mit dem 5-Punkte-Stern und $h = 1/3$ diskretisiert werden. Verwenden Sie eine Diskretisierung der Randableitung von zweiter Ordnung.



Hinweis: Benutzen Sie zur Diskretisierung der Neumann-Randbedingung die fiktiven Knoten 2^* und 5^*, und eliminieren Sie die fiktiven Knoten anschließend durch Diskretisierung der Differentialgleichung auf dem Rand. Stellen Sie die 6 linearen Gleichungen explizit auf.

Ü 43 Die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}((1+xy)u_x) + u_{yy} = y(y-2-4xy) \quad 0 < x,\ y < 1 \\ &u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \text{ für } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ &\frac{\partial u}{\partial n}(x,1) = x(1-x) \text{ für } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

soll mit $h = \frac{1}{2}$ diskretisiert werden. Geben Sie alle Gleichungen explizit an.

Ü 44 Wir betrachten die elliptische Randwertaufgabe

$$(1+xy)u_{xx} - x^2y^2u_{xy} + (4+y^2)u_{yy} \ = \ 1 \text{ auf } [0,1] \times [0,1]$$

mit der Dirichletrandbedingung

$$u(x,y) \ = \ 1 \text{ wenn } x = 0 \text{ oder } x = 1 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } y = 1 \ .$$

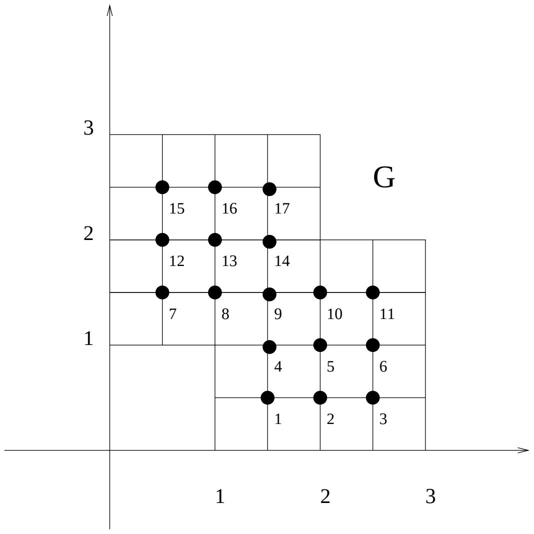
Dieses Problem soll von 2. Ordnung in h mit $h = \frac{1}{4}$ so diskretisiert werden, daß ein lineares Gleichungssystem mit einer M-Matrix entsteht. Numerieren Sie die relevanten Knoten zeilenweise (x-Richtung) mit wachsendem y-Wert und stellen Sie die Gleichung für den Knoten mit den Koordinaten $x = 1/2,\ y = 3/4$ explizit auf.

Hausübung

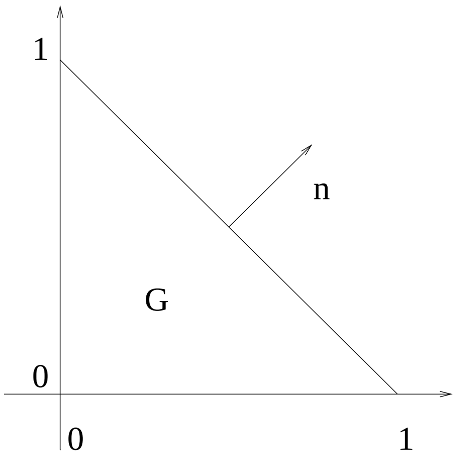
H 42 Man stelle das Gleichungssystem für die Standarddiskretisierung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u = xy \quad & (x,y) \in G \\ u = 1 \quad & (x,y) \in \partial G \end{aligned}$$

auf mit $h = 0.5$ und dem Gebiet



H 43 Lösen Sie das Randwertproblem



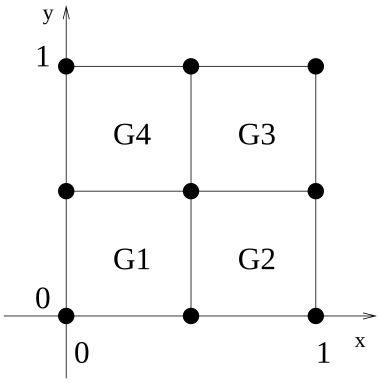
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, & (x,y) \in G, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1-x) &= 0, & x \in [0,1], \\ u(x,0) &= 1 - x^2, & x \in [0,1], \\ u(0,y) &= 1 - y^2, & y \in [0,1] \end{aligned}$$

mit der Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ und einer Diskretisierung der Randableitung von 2. Ordnung.

H 44 Auf die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= xy(x-1)(y-1) \qquad && (x,y) \in G = (0,1)^2 \\ u &= 0 && (x,y) \in \partial G \end{aligned}$$

soll die einfachste Methode der finiten Elemente angewendet werden. Verwenden Sie die Zerlegung



und die stückweise bilineare Ansatzfunktion $\varphi(x,y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy$ (i=1,2,3,4). Bestimmen Sie eine Näherung für $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Hinweis: Verwenden Sie auf G2,G3 und G4 bei der Berechnung der Integrale die Transformation $z = 1 - x$ bzw. $z = 1 - y$. Dadurch lassen sich die Integrale auf die Form der Integrale auf G1 zurückführen.

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 13, Lösungsvorschlag

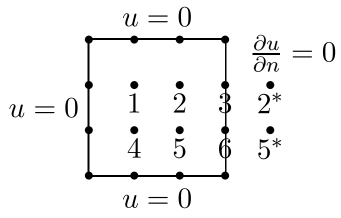
Präsenzübung

Ü 42 2D-Dirichlet-Neumann-Problem

Das gemischte Dirichlet-Neumann-Problem auf dem Gebiet $G = [0,1] \times [0,1]$,

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x,y) &=& f(x,y), & (x,y) \in G, \\ u(x,0) &=& 0, & \\ u(0,y) &=& 0, & \\ u(x,1) &=& 0, & \\ \frac{\partial u}{\partial n} &=& 0, & (x,y) \in \{(x,y)|x=1\} \end{array}$$

soll mit dem 5-Punkte-Stern und $h = 1/3$ diskretisiert werden. Verwenden Sie eine Diskretisierung der Randableitung von zweiter Ordnung.



Hinweis: Benutzen Sie zur Diskretisierung der Neumann-Randbedingung die fiktiven Knoten 2^* und 5^*, und eliminieren Sie die fiktiven Knoten anschließend durch Diskretisierung der Differentialgleichung auf dem Rand. Stellen Sie die 6 linearen Gleichungen explizit auf.

Auf der in dem Bild erkennbaren Gitterstruktur seien $u_i, i = 1, \ldots, 6$, die gesuchten Werte auf den entsprechenden Gitterpunkten. Für die Diskretisierung der zweiten Ableitungen auf den inneren Punkten werden die symmetrischen Differenzenquotienten zweiter Ordnung verwendet:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y) &= \frac{1}{h^2}(u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)) + \mathcal{O}(h^2), \\ u_{yy}(x,y) &= \frac{1}{h^2}(u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Vernachlässigung der Fehlerterme definiert auf den inneren Punkten die Näherungswerte $u_i, i = 1, \ldots, n$, wenn man die Numerierung entsprechend des obigen Bildes beachtet. Zudem fallen die Randwerte mit $u = 0$ weg, und es stellt sich lediglich die Frage, wie die Neumannsche Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ zu behandeln ist.

Bei Problemen dieser Art bezeichnet man mit n den äußeren Normalenvektor auf ∂G, d.h., mit $\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u)^T n$ gilt hier $\frac{\partial u}{\partial n} = u_x$. Unter Verwendung der fiktiven Gitterpunkte 2^* und 5^* gilt für die Punkte 3 und 6:

$$\begin{aligned} u_x(1,h) &= \frac{u(1+h,h) - u(1-h,h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{u_{5^*} - u_5}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\ u_x(1,2h) &= \frac{(u(1+h,2h) - u(1-h,2h))}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{u_{2^*} - u_2}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Vernachlässigt man auch hier die Fehlerterme, so erhält man wegen $\frac{\partial u}{\partial n} = u_x = 0$ *die Gleichungen* $u_{5^*} = u_5$ *und* $u_{2^*} = u_2$. *Somit können in der Diskretisierung der zweiten Ableitungen die fiktiven Knoten eliminiert werden.*

Man erhält folgendes Gleichungssystem:

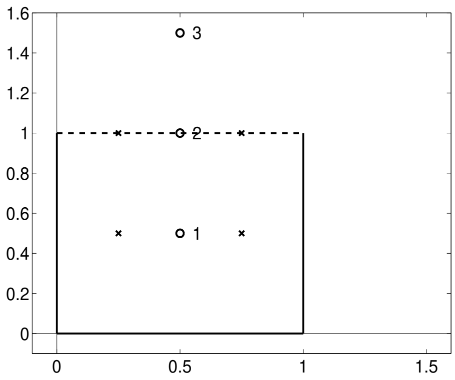
$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 4 & -1 & & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & -2 & 4 & & & -1 \\ -1 & & & 4 & -1 & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & -1 & & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}$$

Ü 43 Die Randwertaufgabe

$$\frac{\partial}{\partial x}((1+xy)u_x) + u_{yy} = y(y-2-4xy) \quad 0 < x,\ y < 1$$
$$u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \text{ für } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,1) = x(1-x) \text{ für } 0 < x < 1$$

soll mit $h = \frac{1}{2}$ diskretisiert werden. Geben Sie alle Gleichungen explizit an.

Ein Bild zur Veranschaulichung:



Auf den durchgezogenen Linien haben wir Nullrandbedingung für die gesuchte Funktion, auf der gestrichelten Linie eine Bedingung an die Normalableitung.

Wir diskretisieren mit dem Schema für eine selbstadjungierte Differentialgleichung die Punkte 1 und 2. Dafür benötigen wir die Hilfspunkte (in der Skizze durch Kreuze gekennzeichnet), an denen $a(x,y) = 1 + xy$ *ausgewertet werden muss. Daneben benutzen wir den symmetrischen Differenzenquotienten für die Normalableitung im Punkt 2 und benötigen also den Hilfspunkt*

3. *Es folgt mit* $g(x,y) = y(y-2-4xy)$ *und* $r(x) = x(1-x)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}\left[u_2 - u_1\left(a\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) + a\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right) + 2\right)\right] &= g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\
\frac{1}{h^2}\left[u_1 + u_3 - u_2\left(a\left(\frac{1}{4},1\right) + a\left(\frac{3}{4},1\right) + 2\right)\right] &= g\left(\frac{1}{2},1\right)\\
\frac{u_3-u_1}{2h} &= r\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Das ergibt das lineare Gleichungssystem (Vorzeichenwechsel in den ersten beiden Gleichungen beachten):

$$\begin{aligned}
\frac{9}{2}u_1 - u_2 &= -\frac{5}{4}\\
u_1 - 5u_2 + u_3 &= \frac{3}{4}\\
u_1 - u_3 &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ü 44 Wir betrachten die elliptische Randwertaufgabe

$$(1+xy)u_{xx} - x^2y^2u_{xy} + (4+y^2)u_{yy} \;=\; 1 \text{ auf } [0,1]\times[0,1]$$

mit der Dirichletrandbedingung

$$u(x,y) \;=\; 1 \text{ wenn } x=0 \text{ oder } x=1 \text{ oder } y=0 \text{ oder } y=1\;.$$

Dieses Problem soll von 2. Ordnung in h mit $h = \frac{1}{4}$ so diskretisiert werden, daß ein lineares Gleichungssystem mit einer M-Matrix entsteht. Numerieren Sie die relevanten Knoten zeilenweise (x-Richtung) mit wachsendem y-Wert und stellen Sie die Gleichung für den Knoten mit den Koordinaten $x = 1/2,\; y = 3/4$ explizit auf.

Hier gilt also (man beachte den Vorzeichenwechsel, wir erseten die Inhomogenität 1 durch -1)

$$a(x,y) \;=\; 1+xy\;,\; b(x,y) \;=\; -\tfrac{1}{2}x^2y^2\;,\; c(x,y) \;=\; 4+y^2$$

und an der Stelle $(x,y) = (0.5, 0.75)$ *haben wir also*

$$a \;=\; \tfrac{11}{8}\;,\; b \;=\; -\tfrac{9}{32}\;,\; c \;=\; \tfrac{25}{4}\;.$$

Wir benutzen den im Skript angegebenen Differenzenstern. Wir haben

$$\begin{aligned}
b^+ &= 0\;,\; b \;=\; b^-\;,\\
-a+|b| &= -\tfrac{11}{8} + \tfrac{9}{32} \;=\; -\tfrac{35}{32}\\
-c+|b| &= -\tfrac{25}{4} + \tfrac{9}{32} \;=\; -\tfrac{191}{32}\\
2(a+c-|b|) &= 2(\tfrac{200}{32} + \tfrac{44}{32} - \tfrac{9}{32}) \;=\; \tfrac{470}{32}
\end{aligned}$$

und der Differenzenstern wird über den Knoten 8 mit den Nachbarn 7, 9, 4, 5 , 6 und drei Randwerten mit dem Funktionswert 1 gelegt:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -9 & -191 & 0 \\ -35 & 470 & -35 \\ 0 & -191 & -9 \end{bmatrix}$$

Dies ergibt nach Multiplikation mit 2 die Gleichung

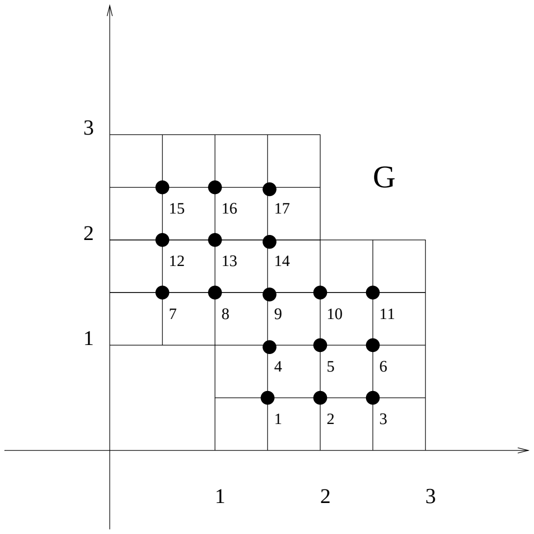
$$-191u_5 - 9u_6 - 35u_7 + 470u_8 - 35u_9 = -2 + 9 + 191$$

Hausübung

H 42 Man stelle das Gleichungssystem für die Standarddiskretisierung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= xy \quad (x,y) \in G \\ u &= 1 \quad (x,y) \in \partial G \end{aligned}$$

auf mit $h = 0.5$ und dem Gebiet



Die Diskretisierung mit dem Standarddifferenzenschema

$$\begin{matrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{matrix}$$

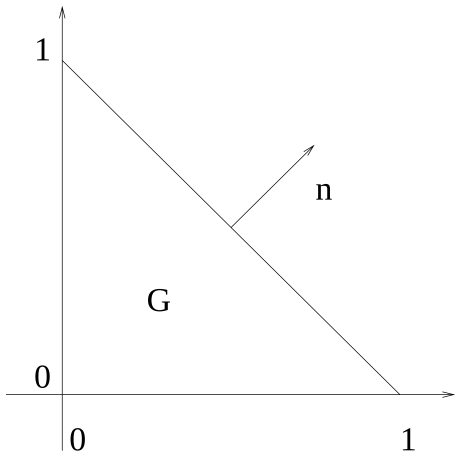
ergibt das LGS $Au^h = b$ *mit*

$$A = \begin{pmatrix}
4&-1&&-1&&&&&&&&&&&&& \\
-1&4&-1&&-1&&&&&&&&&&&& \\
&-1&4&&&-1&&&&&&&&&&& \\
-1&&&4&-1&&&&-1&&&&&&&& \\
&-1&&-1&4&-1&&&&-1&&&&&&& \\
&&-1&&-1&4&&&&&-1&&&&&& \\
&&&&&&4&-1&&&&-1&&&&& \\
&&&&&&-1&4&-1&&&&-1&&&& \\
&&&-1&&&&-1&4&-1&&&&-1&&& \\
&&&&-1&&&&-1&4&-1&&&&&& \\
&&&&&-1&&&&-1&4&&&&&& \\
&&&&&&-1&&&&&4&-1&&-1&& \\
&&&&&&&-1&&&&-1&4&-1&&-1& \\
&&&&&&&&-1&&&&-1&4&&&-1 \\
&&&&&&&&&&&-1&&&4&-1& \\
&&&&&&&&&&&&-1&&-1&4&-1 \\
&&&&&&&&&&&&&-1&&-1&4
\end{pmatrix}$$

und

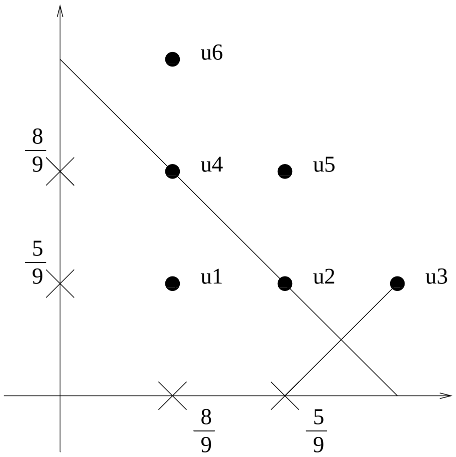
$$b = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

H 43 Lösen Sie das Randwertproblem



$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, & (x,y) &\in G, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1-x) &= 0, & x &\in [0,1], \\ u(x,0) &= 1-x^2, & x &\in [0,1], \\ u(0,y) &= 1-y^2, & y &\in [0,1] \end{aligned}$$

mit der Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ und einer Diskretisierung der Randableitung von 2. Ordnung.



Für die sechs unbekannten Größen u_1 bis u_6 sind sechs Gleichungen zu bestimmen. Drei dieser Gleichungen resultieren aus der Diskretisierung der Randableitung und weitere drei aus der Standarddiskretisierung in den Punkten 1, 2 und 4.

Die Randableitungen werden durch zentrale Differenzenquotienten bestimmt.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}h}(u_3 - \tfrac{5}{9}) &&= \frac{\partial u}{\partial n}(\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{6}) + \mathcal{O}(h^2), \\ 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}h}(u_5 - u_1) &&= \frac{\partial u}{\partial n}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + \mathcal{O}(h^2), \\ 0 &= \frac{1}{\sqrt{2}h}(u_6 - \tfrac{5}{9}) &&= \frac{\partial u}{\partial n}(\tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

und somit

$$u_3 = \frac{5}{9}, \quad u_5 = u_1 \quad \text{und} \quad u_6 = \frac{5}{9}.$$

Aus der Standarddiskretisierung in den Punkten 1, 2 und 4 folgt

$$\begin{aligned} 4u_1 - u_2 - u_4 - \tfrac{8}{9} - \tfrac{8}{9} &= h^2, \\ -u_1 + 4u_2 - u_3 - u_5 - \tfrac{5}{9} &= h^2, \\ -u_1 + 4u_4 - u_5 - u_6 - \tfrac{5}{9} &= h^2. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich das Gleichungssystem

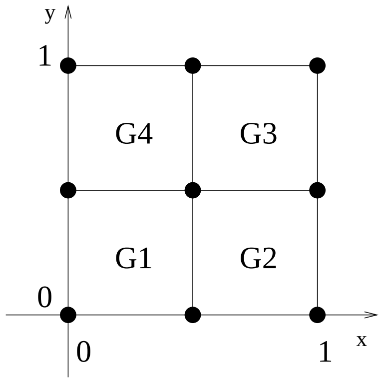
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{9} \\ \frac{11}{9} \\ \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $u_1 = \frac{5}{6}$, $u_2 = u_4 = \frac{13}{18}$.

H 44 Auf die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= xy(x-1)(y-1) \qquad && (x,y) \in G = (0,1)^2 \\ u &= 0 && (x,y) \in \partial G \end{aligned}$$

soll die einfachste Methode der finiten Elemente angewendet werden. Verwenden Sie die Zerlegung



und die stückweise bilineare Ansatzfunktion $\varphi(x,y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy$ (i=1,2,3,4). Bestimmen Sie eine Näherung für $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Hinweis: Verwenden Sie auf G2,G3 und G4 bei der Berechnung der Integrale die Transformation $z = 1 - x$ bzw. $z = 1 - y$. Dadurch lassen sich die Integrale auf die Form der Integrale auf G1 zurückführen.

Die selbstadjungierte Form des elliptischen RWP lautet

$$-\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}u) - \frac{\partial}{\partial y}(a_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u) + c(x,y)u = g(x,y) \quad \textit{für} \quad (x,y) \in G$$

und $u(x,y) \equiv 0$ *für* $(x,y) \in \partial G$. *Damit ist* $a_1 \equiv 1 \equiv a_2$, $c \equiv 0$ *und* $g(x,y) = xy(x-1)(y-1)$.
Die einzige Ansatzfunktion $\varphi(x,y)$ *besteht aus den vier Teilstücken*

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 4xy & (x,y) \in G_1 \\ -4(x-1)y & (x,y) \in G_2 \\ 4(x-1)(y-1) & (x,y) \in G_3 \\ -4(x(y-1) & (x,y) \in G_4 \end{cases}$$

Die Approximation der Lösung u *wird nun bestimmt als* $\alpha\varphi$, *aus der Minimierung des Integrals*

$$\begin{aligned} I(\alpha\varphi) &= \int_G \left((\alpha\varphi_x)^2 + (\alpha\varphi_y)^2 - 2g\alpha\varphi\right) dx\ dy \\ &= \alpha^2 \int_G \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) dx\ dy - 2\alpha \int_G g\varphi\ dx\ dy \end{aligned}$$

bezüglich des Parameters α. *Notwendig dafür ist*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} I(\alpha\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\int_G g\varphi\ dx\ dy}{\int_G \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) dx\ dy}.$$

Das Integral im Nenner ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \int_{G_1} \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) dx\ dy &= \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \left(16y^2 + 16x^2\right) dx\ dy = \tfrac{16}{24} = \tfrac{2}{3} \\ \int_{G_2} \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) dx\ dy &= \int_0^{1/2}\int_{1/2}^{1} \left(16y^2 + 16(x-1)^2\right) dx\ dy \\ &= \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \left(16y^2 + 16z^2\right) dz\ dy = \tfrac{16}{24} = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Analog $\int_{G_i} \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) dx\ dy = \frac{2}{3}$ *für* $i = 3, 4$ *und somit*

$$\int\limits_G \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) dx\ dy = 4\frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Der Zähler besteht aus den Integralen

$$\begin{aligned}
\int\limits_{G_1} \varphi g\ dx\ dy &= \int\limits_0^{1/2}\int\limits_0^{1/2} \left(4(x^3 - x^2)(y^3 - y^2)\right) dx\ dy = 4\left(\tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{24}\right)^2 = \tfrac{25}{9216} \\
\int\limits_{G_2} \varphi g\ dx\ dy &= -\int\limits_0^{1/2}\int\limits_{1/2}^{1} \left(4(x-1)^2 x(y^3 - y^2)\right) dx\ dy \\
&= \int\limits_0^{1/2}\int\limits_{1/2}^{0} \left(4z^2(1-z)(y^3 - y^2)\right) dz\ dy \\
&= \int\limits_0^{1/2}\int\limits_0^{1/2} \left(4(z^3 - z^2)(y^3 - y^2)\right) dz\ dy = \tfrac{25}{9216}
\end{aligned}$$

Analog $\int_{G_i} \varphi g\ dx\ dy = \frac{25}{9216}$ *für* $i = 3, 4$ *und somit*

$$\int\limits_G \varphi g\ dx\ dy = 4\frac{25}{9216} = \frac{25}{2304}.$$

Somit ist

$$\alpha^* = \frac{25}{2304} \cdot \frac{3}{8} = \frac{75}{18432} = 0.00407(\approx u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})).$$