Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

15. Januar 2008

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 12

Präsenzübung

Ü 39 Approximieren Sie die Lösung $y(x)$ des Randwertproblems

$$y'' = \frac{2y}{(1+x)^2}, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 1 \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

mit dem Differenzenverfahren 2. Ordnung für $h_1 = \frac{1}{2}$ und $h_2 = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie durch Extrapolation einen genaueren Näherungswert für $y(\frac{1}{2})$. Die exakte Lösung lautet $y(x) = \frac{1}{1+x}$.

Ü 40 Selbstadjungierte Probleme

Die Randwertaufgabe

$$((1+x)^3 y')' + \sin(x) y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 1$$

soll unter Verwendung von Differenzenverfahren mit Gitterabstand $h = \frac{1}{n}$ gelöst werden.

1. Formen Sie die Differentialgleichung durch Ausdifferenzieren um und bestimmen Sie eine Diskretisierung mit Differenzenformeln zweiter Ordnung. Ist die erhaltene Matrix symmetrisch?
2. Diskretisieren Sie die Differentialgleichung durch iteriertes Anwenden von Differenzenformeln zweiter Ordnung mit halbierter Schrittweite. Zeigen Sie, daß diese Diskretisierung eine symmetrische Matrix liefert.

Ü 41 **RWA mit gemischten Randwerten.** Vorgelegt sei ein Randwertproblem der Form

$$-y''(x) = f(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, \; y'(b) = \beta.$$

a) Wie lautet die exakte Lösung dieses Randwertproblems?
(Hier kann man schrittweise explizit integrieren)

b) Verwenden Sie zur Diskretisierung mit $h = \frac{b-a}{N+1}$ und $x_i = a + ih$ folgendes Differenzenverfahren:

$$\begin{aligned} {y^h}_0 &= \alpha \\ -{y^h}_{i-1} + 2{y^h}_i - {y^h}_{i+1} &= h^2 f(x_i), \quad i = 1, ..., N \\ {y^h}_{N+1} - {y^h}_N &= h\,\beta \end{aligned}$$

Von welcher Ordnung ist die Diskretisierung der ersten Ableitung? Wie lautet das entstehende Gleichungssystem? Zeigen Sie, daß es sich bei der Matrix um eine irreduzibel diagonaldominante Tridiagonalmatrix handelt.

c) Die Approximation des rechten Randwertes kann auch erfolgen durch

$$\begin{aligned} -{y^h}_{N+2} + 2{y^h}_{N+1} - {y^h}_N &= h^2 f(x_{N+1}), \\ {y^h}_{N+2} - {y^h}_N &= 2h\,\beta, \end{aligned}$$

wobei die Hilfsgröße ${y^h}_{N+2}$ an der Stützstelle x_{N+2} eingeführt wird. Diese kann jedoch durch Addition der beiden Zeilen eliminiert werden. Wie verändert sich das Gleichungssystem aus b), wenn die letzte Zeile durch die neue Bedingung ersetzt wird? Von welcher Ordnung ist diese Diskretisierung der ersten Ableitung?

Hausübung

H 39 Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-y'' + x^2 y' + y^3 = -1,\ x \in [0,1] \quad \text{mit} \quad y(0) = y(1) = 0.$$

a) Diskretisieren Sie das RWP mit dem Differenzenverfahren 2. Ordnung auf einem allgemeinen Gitter $x_i = 0 + i \cdot h$ mit $i = 0, \ldots, N$ und $h = \frac{1}{N}$.

b) Das entstehende Gleichungssystem ist nichtlinear. Zeigen Sie, daß die Jacobimatrix des Systems für alle möglichen h eine irreduzibel diagonaldominate L-Matrix ist.

H 40 Nichtsymmetrischer Differenzenquotient
Die Symmetrie hat für numerische Verfahren eine große Bedeutung. Ähnlich zu den Quadraturen bringt die Symmetrie auch in den Differenzenquotienten jeweils eine Ordnung mehr. Bei einem nichtäquidistanten Gitter geht die Symmetrie verloren. Zeigen Sie, dass

$$y_i'' \approx 2\,\frac{h_{i+1}y_{i-1} - (h_i + h_{i+1})y_i + h_i y_{i+1}}{h_i\, h_{i+1}\,(h_i + h_{i+1})}, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

nur noch eine Approximation erster Ordnung darstellt.

H 41 Ein Balken der Biegesteifigkeit JE werde auf einen elastischen Untergrund (mit der Federkonstanten $k(x)$ pro Längeneinheit) gelegt und mit dem Gewicht $p(x)$ belastet. Die Durchbiegung y wird durch folgendes Randwertproblem beschrieben:

$$\begin{aligned} (JEy'')'' + ky + p &= 0 \\ y''(0) = y'''(0) = y''(L) = y'''(L) &= 0 \end{aligned}$$

a) Diskretisieren Sie die Differentialgleichung für $JE = 1$, indem Sie $x_i = ih$ für $i = -2, -1, \ldots, N+1, N+2$ mit $h = 1/N$ setzen und $y''''(x_i)$ durch

$$y''''(x_i) \approx h^{-4}({y^h}_{i-2} - 4{y^h}_{i-1} + 6{y^h}_i - 4{y^h}_{i+1} + {y^h}_{i+2}), \qquad i = 0, \ldots, N$$

approximieren. Die Randbedingungen sollen durch

$$\begin{aligned} {y^h}_{-2} - 2{y^h}_{-1} + {y^h}_0 &= 0 \qquad & {y^h}_{N-1} - 2{y^h}_N + {y^h}_{N+1} &= 0 \\ {y^h}_{-1} - 2{y^h}_0 + {y^h}_1 &= 0 \qquad & {y^h}_N - 2{y^h}_{N+1} + {y^h}_{N+2} &= 0 \end{aligned}$$

angenähert werden. Wie lautet das zu lösende Gleichungssystem?
Eliminieren Sie die fiktiven Knoten ${y^h}_{-2}, {y^h}_{-1}$ und ${y^h}_{N+1}, {y^h}_{N+2}$ aus dem Gleichungssystem.

b) Zeigen Sie, daß die Approximation der Randbedingungen für Polynome dritten Grades exakt ist.

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 12, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 39 Approximieren Sie die Lösung $y(x)$ des Randwertproblems

$$y'' = \frac{2y}{(1+x)^2}, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 1 \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

mit dem Differenzenverfahren 2. Ordnung für $h_1 = \frac{1}{2}$ und $h_2 = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie durch Extrapolation einen genaueren Näherungswert für $y(\frac{1}{2})$. Die exakte Lösung lautet $y(x) = \frac{1}{1+x}$.

Die Diskretisierungen mit den zweiten Differenzenquotienten auf dem groben Gitter mit $h_1 = \frac{1}{2}$ ($x_i = 0.5i$) ergibt die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} y_0^{h_1} &= 1 \\ y_2^{h_1} &= \tfrac{1}{2} \\ y_0^{h_1} - 2y_1^{h_1} + y_2^{h_1} &= h_1^2 \tfrac{2y_1^{h_1}}{(1+x_1)^2}. \end{aligned}$$

Die Lösung ist $y_1^{h_1} = 0.675$.
Analog ergibt sich für die feinere Diskretisierung mit $h_2 = \frac{1}{4}$ ($x_i = 0.25i$)

$$\begin{aligned} y_0^{h_2} &= 1 \\ y_4^{h_2} &= \tfrac{1}{2} \\ y_0^{h_2} - 2y_1^{h_2} + y_2^{h_2} &= h_1^2 \tfrac{2y_1^{h_2}}{(1+x_1)^2} \\ y_1^{h_2} - 2y_2^{h_2} + y_3^{h_2} &= h_1^2 \tfrac{2y_2^{h_2}}{(1+x_2)^2} \\ y_2^{h_2} - 2y_3^{h_2} + y_4^{h_2} &= h_1^2 \tfrac{2y_3^{h_2}}{(1+x_3)^2}. \end{aligned}$$

Oder als lineares GS geschrieben

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{25} & -1 & 0 \\ -1 & 2 + \frac{2}{36} & -1 \\ 0 & -1 & 2 + \frac{2}{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{h_2} \\ y_2^{h_2} \\ y_3^{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} y_1^{h_2} \\ y_2^{h_2} \\ y_3^{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8024 \\ 0.66904 \\ 0.5728 \end{pmatrix}$$

Die beiden Näherungen für den jeweils mittleren Gitterpunkt sind $y_{x=0.5}^{h_1} = 0.675$ und $y_{x=0.5}^{h_2} =$ 0.66904. Extrapolation ergibt die bessere Näherung

$$\tilde{y}_{x=0.5} = \frac{1}{3}(4y_{x=0.5}^{h_2} - y_{x=0.5}^{h_1}) = 0.66705.$$

Der exakte Wert beträgt $y(0.5) = 0.\overline{6}$.

Ü 40 Selbstadjungierte Probleme

Die Randwertaufgabe

$$((1+x)^3 y')' + \sin(x) y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 1$$

soll unter Verwendung von Differenzenverfahren mit Gitterabstand $h = \frac{1}{n}$ gelöst werden.

1. Formen Sie die Differentialgleichung durch Ausdifferenzieren um und bestimmen Sie eine Diskretisierung mit Differenzenformeln zweiter Ordnung. Ist die erhaltene Matrix symmetrisch?
2. Diskretisieren Sie die Differentialgleichung durch iteriertes Anwenden von Differenzenformeln zweiter Ordnung mit halbierter Schrittweite. Zeigen Sie, daß diese Diskretisierung eine symmetrische Matrix liefert.

1. *Ausdifferenzieren liefert*

$$3(1+x)^2 y' + (1+x)^3 y'' + \sin(x) y = 0$$

und damit die Diskretisierung

$$3h(1+x_i)^2({y^h}_{i+1} - {y^h}_{i-1}) + 2(1+x_i)^3({y^h}_{i+1} - 2{y^h}_i + {y^h}_{i-1}) + 2h^2 \sin(x_i){y^h}_i = 0.$$

Schreibt man abkürzend $d_i = 2h^2 \sin(x_i) - 4(1+x_i)^3$, $a_i = 2(1+x_i)^3$ *und* $b_i = 3h(1+x_i)^2$, *so hat die Matrix die Form*

$$\begin{pmatrix} d_1 & a_1+b_1 & 0 & \cdots & \\ a_2-b_2 & d_2 & a_2+b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & a_{n-2}-b_{n-2} & d_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} \\ & \cdots & 0 & a_{n-1}-b_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist für allgemeines h nicht symmetrisch.

2. *Diskretisieren der Differentialgleichung liefert*

$$(1+x_{i+1/2})^3 {y^{h}}'_{i+1/2} - (1+x_{i-1/2})^3 {y^{h}}'_{i-1/2} + h \sin(x_i){y^h}_i = 0$$

im ersten und

$$(1+x_{i+1/2})^3({y^h}_{i+1} - {y^h}_i) - (1+x_{i-1/2})^3({y^h}_i - {y^h}_{i-1}) + h^2 \sin(x_i){y^h}_i = 0$$

im zweiten Schritt. Mit den Abkürzungen $d_i = h^2 \sin(x_i) - (1+x_{i+1/2})^3 - (1+x_{i-1/2})^3$ *und* $a_i = (1+x_{i+1/2})^3$ *ergibt sich für die Matrix*

$$\begin{pmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \cdots & \\ a_1 & d_2 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & a_{n-2} & d_{n-2} & a_{n-1} \\ & \cdots & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist für alle h symmetrisch.

Ü 41 RWA mit gemischten Randwerten. Vorgelegt sei ein Randwertproblem der Form

$$-y''(x) = f(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha,\ y'(b) = \beta.$$

a) Wie lautet die exakte Lösung dieses Randwertproblems?
(Hier kann man schrittweise explizit integrieren)

b) Verwenden Sie zur Diskretisierung mit $h = \frac{b-a}{N+1}$ und $x_i = a + ih$ folgendes Differenzenverfahren:

$$\begin{aligned} {y^h}_0 &= \alpha \\ -{y^h}_{i-1} + 2{y^h}_i - {y^h}_{i+1} &= h^2 f(x_i), \quad i = 1, ..., N \\ {y^h}_{N+1} - {y^h}_N &= h\,\beta \end{aligned}$$

Von welcher Ordnung ist die Diskretisierung der ersten Ableitung? Wie lautet das entstehende Gleichungssystem? Zeigen Sie, daß es sich bei der Matrix um eine irreduzibel diagonaldominante Tridiagonalmatrix handelt.

c) Die Approximation des rechten Randwertes kann auch erfolgen durch

$$\begin{aligned} -{y^h}_{N+2} + 2{y^h}_{N+1} - {y^h}_N &= h^2 f(x_{N+1}), \\ {y^h}_{N+2} - {y^h}_N &= 2h\,\beta, \end{aligned}$$

wobei die Hilfsgröße ${y^h}_{N+2}$ an der Stützstelle x_{N+2} eingeführt wird. Diese kann jedoch durch Addition der beiden Zeilen eliminiert werden. Wie verändert sich das Gleichungssystem aus b), wenn die letzte Zeile durch die neue Bedingung ersetzt wird? Von welcher Ordnung ist diese Diskretisierung der ersten Ableitung?

a) *Mit*

$$y'(\xi) = \underbrace{y'(b)}_{\beta} + \int_b^\xi y''(\eta)\, d\eta = \beta + \int_\xi^b f(\eta)\, d\eta$$

lautet die Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{y(a)}_{\alpha} + \int_a^x y'(\xi)\, d\xi \\ &= \alpha + \int_a^x \left(\beta + \int_\xi^b f(\eta)\, d\eta \right) d\xi \\ &= \alpha + \beta(x-a) + \int_a^x \int_\xi^b f(\eta)\, d\eta\, d\xi. \end{aligned}$$

b) *Die erste Ableitung wird hier nur von erster Ordnung diskretisiert. Nach Multiplikation der* *letzten Zeile mit 2 entsteht folgendes Gleichungssystem:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}^h = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) + \alpha \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_N) \\ 2h\,\beta \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist diagonaldominant mit

$$2 \geq |-1| + |-1|$$

und irreduzibel, da beide Nebendiagonalen voll besetzt sind. Da in der ersten Zeile die strikte Ungleichung $|2| > |-1|$ *gilt, ist die Matrix sogar irreduzibel diagonaldominant.*

c) *Die erste Ableitung wird nun von zweiter Ordnung diskretisiert. Addition der beiden Gleichungen ergibt*

$$-2{y^h}_N + 2{y^h}_{N+1} = h^2 f(x_{N+1}) + 2h\,\beta.$$

Das entstehende Gleichungssystem unterscheiden sich von dem in b) also nur in der rechten Seite, die Matrix ist wieder irreduzibel diagonaldominante Tridiagonalmatrix,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}^h = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) + \alpha \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_N) \\ h^2 f(x_{N+1}) + 2h\,\beta \end{pmatrix}.$$

Hausübung

H 39 Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-y'' + x^2 y' + y^3 = -1,\ x \in [0,1] \quad \text{mit} \quad y(0) = y(1) = 0.$$

a) Diskretisieren Sie das RWP mit dem Differenzenverfahren 2. Ordnung auf einem allgemeinen Gitter $x_i = 0 + i \cdot h$ mit $i = 0, \ldots, N$ und $h = \frac{1}{N}$.

b) Das entstehende Gleichungssystem ist nichtlinear. Zeigen Sie, daß die Jacobimatrix des Systems für alle möglichen h eine irreduzibel diagonaldominate L-Matrix ist.

a) *Bei dem Differenzenverfahren 2. Odnung werden die Differenzenquotienten*

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + \mathcal{O}(h^2)$$

und

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + \mathcal{O}(h^2)$$

verwendet. Auf den Gitterpunkten ergeben sich somit die Gleichungen

$$\begin{aligned}
{y^h}_0 &= 0\\
-\tfrac{1}{h^2}({y^h}_2 - 2{y^h}_1 + {y^h}_0) + \tfrac{x_1^2}{2h}({y^h}_2 - {y^h}_0) + {y^h}_1^3 + 1 &= 0\\
&\vdots\\
-\tfrac{1}{h^2}({y^h}_N - 2{y^h}_{N-1} + {y^h}_{N-2}) + \tfrac{x_{N-1}^2}{2h}({y^h}_N - {y^h}_{N-2}) + {y^h}_{N-1}^3 + 1 &= 0\\
{y^h}_N &= 0
\end{aligned}$$

Und nach Einsetzen von ${y^h}_0$ und ${y^h}_N$ bleibt das System $F(\vec{y}^h) = 0$ mit

$$F(\vec{y}^h) = \begin{pmatrix}
-\frac{1}{h^2}({y^h}_2 - 2{y^h}_1) + \frac{x_1^2}{2h}({y^h}_2) + {y^h}_1^3 + 1\\
-\frac{1}{h^2}({y^h}_3 - 2{y^h}_2 + {y^h}_1) + \frac{x_2^2}{2h}({y^h}_3 - {y^h}_1) + {y^h}_2^3 + 1\\
\vdots\\
-\frac{1}{h^2}({y^h}_{N-1} - 2{y^h}_{N-2} + {y^h}_{N-3}) + \frac{x_{N-2}^2}{2h}({y^h}_{N-1} - {y^h}_{N-3}) + {y^h}_{N-2}^3 + 1\\
-\frac{1}{h^2}(-2{y^h}_{N-1} + {y^h}_{N-2}) + \frac{x_{N-1}^2}{2h}(-{y^h}_{N-2}) + {y^h}_{N-1}^3 + 1
\end{pmatrix}$$

b) *Die Jacobimatrix $\mathcal{J}_F(\vec{y}^h)$ dieses nichtlinearen Gleichungssystems lautet*

$$\frac{1}{h^2}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
2 + 3h^2 {y^h}_1^2 & -1 + \frac{h}{2}x_1^2 & 0 & \cdots & \\
-1 - \frac{h}{2}x_2^2 & 2 + 3h^2 {y^h}_2^2 & -1 + \frac{h}{2}x_2^2 & 0 & \cdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\cdots & 0 & -1 - \frac{h}{2}x_{N-2}^2 & 2 + 3h^2 {y^h}_{N-2}^2 & -1 + \frac{h}{2}x_{N-2}^2\\
 & \cdots & 0 & -1 - \frac{h}{2}x_{N-1}^2 & 2 + 3h^2 {y^h}_{N-1}^2
\end{array}\right)$$

Die Diagonalelemente dieser Matrix haben die Form

$$(\mathcal{J}_F(\vec{y}^h))_{i,i} = \frac{1}{h^2}\left(2 + 3h^2 {y^h}_i^2\right), \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Da ${y^h}_i^2 \geq 0$ gilt, sind die Diagonalelemente alle positiv. Für die Subdiagonale gilt

$$(\mathcal{J}_F(\vec{y}^h))_{i+1,i} = \frac{1}{h^2}\left(-1 - \frac{h}{2}x_{i+1}^2\right), \quad i = 1, \ldots, N-2.$$

Diese Einträge sind aber für alle h negativ. Für die Superdiagonale gilt

$$(\mathcal{J}_F(\vec{y}^h))_{i,i+1} = \frac{1}{h^2}\left(-1 + \frac{h}{2}x_i^2\right), \quad i = 1, \ldots, N-2.$$

Und da $0 \leq x_i^2 \leq 1$ und $0 < h \leq 1$ gilt, sind diese Elemente ebenfalls negativ. Damit ist $\mathcal{J}_F(\vec{y}^h)$ eine L-Matrix.
Aus der bisherigen Argumentation erhalten wird ebenfalls, daß die Jacobimatrix irreduzibel ist. Es bleibt nur noch die Diagonaldominanz zu zeigen. Aus der ersten Zeile der Matrix ergibt sich

$$\frac{1}{h^2}\left(2 + 3h^2 {y^h}_1^2 - \left(1 - \frac{h}{2}x_1^2\right)\right) = \frac{1}{h^2}\left(1 + 3h^2 {y^h}_1^2 + \frac{h}{2}x_1^2\right) > \frac{1}{h^2}.$$

Für alle $i = 2, \ldots, N-1$ ergibt sich

$$\frac{1}{h^2}\left(2 + 3h^2 {y^h}_i^2 - \left(1 + \frac{h}{2}x_i^2\right) - \left(1 - \frac{h}{2}x_i^2\right)\right) = 3{y^h}_i^2 \geq 0.$$

Analog zur ersten Zeile ergibt sich in der $(N-1)$-ten Zeile

$$\frac{1}{h^2}\left(2 + 3h^2 {y^h}_{N-1}^2 - \left(1 + \frac{h}{2}x_{N-1}^2\right)\right) = \frac{1}{h^2}\left(1 + 3h^2 {y^h}_{N-1}^2 - \frac{h}{2}x_{N-1}^2\right) > \frac{1}{2h^2}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

H 40 Nichtsymmetrischer Differenzenquotient

Die Symmetrie hat für numerische Verfahren eine große Bedeutung. Ähnlich zu den Quadraturen bringt die Symmetrie auch in den Differenzenquotienten jeweils eine Ordnung mehr. Bei einem nichtäquidistanten Gitter geht die Symmetrie verloren. Zeigen Sie, dass

$$y_i'' \;\approx\; 2\,\frac{h_{i+1}y_{i-1} \;-\; (h_i + h_{i+1})y_i \;+\; h_i y_{i+1}}{h_i\, h_{i+1}\,(h_i + h_{i+1})}\,, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

nur noch eine Approximation erster Ordnung darstellt.

Taylorentwicklung der beiden Terme $y_{i\pm1}$ führt auf

$$\begin{aligned} y_{i-1} &= y_i - h_i y_i' + \frac{h_i^2}{2}y_i'' - \frac{h_i^3}{6}y_i''' + \mathcal{O}(h_i^4) \\ y_{i+1} &= y_i + h_{i+1} y_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2}y_i'' + \frac{h_{i+1}^3}{6}y_i''' + \mathcal{O}(h_{i+1}^4) \end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Entwicklungen in den Term auf der rechten Seite ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{h_i\, h_{i+1}\,(h_i + h_{i+1})}\left[y_i''\, h_i\, h_{i+1}\frac{h_i + h_{i+1}}{2} \;+\; y_i'''\, h_i\, h_{i+1}\frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{6} \;+\; \mathcal{O}\Big(\max\{h_i, h_{i+1}\}^5\Big)\right] \\ &\qquad = y_i'' \;+\; \frac{h_{i+1} - h_i}{3}y_i''' \;+\; \mathcal{O}\Big(\max\{h_i, h_{i+1}\}^2\Big) \end{aligned}$$

Es bleibt also ein Term erster Ordnung übrig. Für ein äquidistantes Gitter gilt $h_i = h_{i+1}$ und damit würde der Term erster Ordnung wegfallen. Es entsteht der bekannte zentrale Differenzenquotient zweiter Ordnung.

H 41 Ein Balken der Biegesteifigkeit JE werde auf einen elastischen Untergrund (mit der Federkonstanten $k(x)$ pro Längeneinheit) gelegt und mit dem Gewicht $p(x)$ belastet. Die Durchbiegung y wird durch folgendes Randwertproblem beschrieben:

$$\begin{aligned} (JEy'')'' + ky + p &= 0 \\ y''(0) = y'''(0) = y''(L) = y'''(L) &= 0 \end{aligned}$$

a) Diskretisieren Sie die Differentialgleichung für $JE = 1$, indem Sie $x_i = ih$ für $i = -2, -1, \ldots, N+1, N+2$ mit $h = 1/N$ setzen und $y''''(x_i)$ durch

$$y''''(x_i) \approx h^{-4}({y^h}_{i-2} - 4{y^h}_{i-1} + 6{y^h}_i - 4{y^h}_{i+1} + {y^h}_{i+2}), \qquad i = 0, \ldots, N$$

approximieren. Die Randbedingungen sollen durch

$$\begin{aligned} {y^h}_{-2} - 2{y^h}_{-1} + {y^h}_0 &= 0 \qquad & {y^h}_{N-1} - 2{y^h}_N + {y^h}_{N+1} &= 0 \\ {y^h}_{-1} - 2{y^h}_0 + {y^h}_1 &= 0 \qquad & {y^h}_N - 2{y^h}_{N+1} + {y^h}_{N+2} &= 0 \end{aligned}$$

angenähert werden. Wie lautet das zu lösende Gleichungssystem?
Eliminieren Sie die fiktiven Knoten ${y^h}_{-2}, {y^h}_{-1}$ und ${y^h}_{N+1}, {y^h}_{N+2}$ aus dem Gleichungssystem.

b) Zeigen Sie, daß die Approximation der Randbedingungen für Polynome dritten Grades exakt ist.

a) *Das lineare Gleichungssystem hat folgende Form:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & K_0 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & K_1 & -4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -4 & K_{N-1} & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & -4 & K_N & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {y^h}_{-2} \\ {y^h}_{-1} \\ {y^h}_0 \\ {y^h}_1 \\ \vdots \\ {y^h}_{N-1} \\ {y^h}_N \\ {y^h}_{N+1} \\ {y^h}_{N+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h^4 p_0 \\ -h^4 p_1 \\ \vdots \\ -h^4 p_{N-1} \\ -h^4 p_N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

($K_i = 6 + h^4 k_i$).
Eliminiere erste und zweite Spalte, in dem man $3. - 1. - 2 \cdot 2.$ und $4. - 2.$ Zeile. Analog für die letzten Zeilen. Das ergibt das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{K}_0 & -2 & 1 & & & & \\ -2 & \widetilde{K}_1 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & K_2 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & K_{N-2} & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 & \widetilde{K}_{N-1} & -2 \\ & & & & 1 & -2 & \widetilde{K}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {y^h}_0 \\ {y^h}_1 \\ {y^h}_2 \\ \vdots \\ {y^h}_{N-2} \\ {y^h}_{N-1} \\ {y^h}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^4 p_0 \\ -h^4 p_1 \\ -h^4 p_2 \\ \vdots \\ -h^4 p_{N-2} \\ -h^4 p_{N-1} \\ -h^4 p_N \end{pmatrix}$$

($\widetilde{K}_0 = 1 + h^4 k_0$, $\widetilde{K}_1 = 5 + h^4 k_1$, $\widetilde{K}_{N-1} = 5 + h^4 k_{N-1}$, $\widetilde{K}_N = 1 + h^4 k_N$).

b) *Mit Taylorentwicklung gilt:*

$$f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x) = h^2 f''(x-h) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(\xi_1)$$
$$f(x-h) - 2f(x) + f(x+h) = h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(\xi_2).$$

Die Randbedingungen sind für $p \in \Pi_3$ *exakt, falls* $p''(0) = p'''(0) = 0$ *aus*

$$p(-2h) - p(-h) + p(0) = p(-h) - p(0) + p(h) = 0$$

folgt. Mit obiger Taylorentwicklung folgt zunächst

$$h^2 p''(-h) = h^2 p''(0) = 0.$$

Wir stellen p(x) dar als

$$ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Somit haben wir $p''(0) = 2b$, *mit der Taylorreihe folgt sofort* $b = 0$. *Ebenso sieht man leicht, daß* $-6ah = 0$ *gilt, woraus* $a = 0$ *und damit* $p'''(0) = a = 0$ *folgt. Genauso folgt die Aussage für den anderen Rand.*