Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Januar 2008

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 11

Präsenzübung

Ü 35 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie mit dem Startvektor $x^{(0)} = (-6, -6)^T$ jeweils drei Schritte des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens aus.

b) Erstellen Sie eine Skizze, die die beiden Gleichungen des Systems als Geraden interpretiert (die exakte Lösung lautet $x^* = (3.\overline{6}, 2.\overline{3})^T$) und ergänzen Sie die Skizze um die Iterationsfolgen

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Gauß-Seidel-Verfahrens und

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Jacobi-Verfahrens.

Ü 36 Zeigen Sie: Jede Matrix mit nicht verschwindenden Einträgen auf den ersten Nebendiagonalen ist irreduzibel. (Insbesondere ist jede Tridiagonalmatrix mit dieser Gestalt irreduzibel.)

Ü 37 Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ eignet sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

zur Durchführung des SOR-Verfahrens mit

a) $0 < \omega \leq 1$?

b) $0 < \omega < 2$?

c) $0 < \omega \leq \omega_0, \omega_0 > 1$? (ω_0 nicht bekannt)

Ü 38 Finden Sie eine symmetrisch positiv definite Matrix A, für die das Jacobi-Verfahren nicht konvergiert.
Hinweis: Betrachten Sie Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Hausübung

H 35 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welches der beiden zu folgenden Zerlegungen gehörenden Iterationsverfahren konvergiert für alle $x_0 \in \mathbb{R}^3$ gegen die Lösung x^* von $Ax^* = b,\ b \in \mathbb{R}^3$?

a) $G \ = \ D^{-1}(L+U)$ (Gesamtschrittverfahren)

b) $G \ = \ (D-L)^{-1}U$ (Einzelschrittverfahren)

H 36 Bei der Diskretisierung einer 2-Punkt Randwertaufgabe einer gewöhnlichen DGL 2. Ordnung ist ein lineares Gleichungssystem entstanden. Die Matrix hat die Dimension $N \times N$, ist tridiagonal und hat folgende Struktur:

$$\frac{1}{h^2}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 2+h^2c & -1+\frac{h}{2}r & & & \\ \hline -1-\frac{h}{2}r & 2+h^2c & -1+\frac{h}{2}r & & \\ \hline & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \hline & & -1-\frac{h}{2}r & 2+h^2c & -1+\frac{h}{2}r \\ \hline & & & -1-\frac{h}{2}r & 2+h^2c \end{array}\right).$$

Dabei seien $r \in \mathbb{R}$ und $0 \leq c \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig. Welche Bedingungen muß man an die Schrittweite h stellen, damit die Matrix eine irreduzibel-diagonaldominate L-Matrix, also eine M-Matrix ist. Für die Schrittweite h gilt übrigens die Relation $h = \frac{1}{N}$ (je kleiner h desto größer die Matrix).

H 37 (*Eigenschaften von Matrizen*)

Untersuchen Sie die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 10 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & 4-a & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

auf die Eigenschaften Irreduzibilität, strikte und irreduzible Diagonaldominanz, L- und M-Matrix.

H 38 Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_i &= 3x_{i+1} + b_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ x_n &= b_n. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß das Einzelschritt-Verfahren für alle Startwerte konvergiert.

b) Berechnen Sie mit $b = (0, \ldots, 0, -3, 1)^T$, $n = 100$ und $x^{(0)} = (0, \ldots, 0)^\top$ den Fehler $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty$ für alle Iterierten $k \in \mathbb{N}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 11, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 35 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie mit dem Startvektor $x^{(0)} = (-6, -6)^T$ jeweils drei Schritte des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens aus.

b) Erstellen Sie eine Skizze, die die beiden Gleichungen des Systems als Geraden interpretiert (die exakte Lösung lautet $x^* = (3.\overline{6}, 2.\overline{3})^T$) und ergänzen Sie die Skizze um die Iterationsfolgen

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Gauß-Seidel-Verfahrens und

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Jacobi-Verfahrens.

a) *Die Zerlegung der Matrix A in $D - L - U$ ergibt für das* **Jacobi-Verfahren** *die Iterationsvorschrift*

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

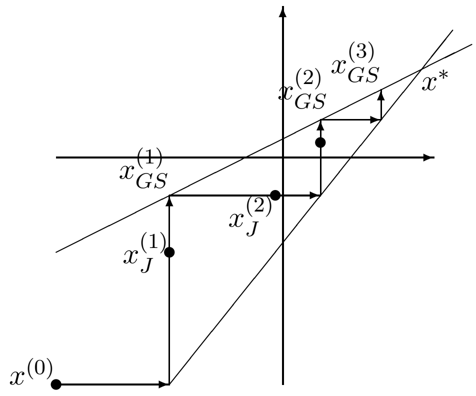
Das **Gauß-Seidel-Verfahren** *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b) \\ x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(9 + 4x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{2}(1 + x_1^{(k+1)}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

b) *Die graphische Darstellung ergibt*



Ü 36 Zeigen Sie: Jede Matrix mit nicht verschwindenden Einträgen auf den ersten Nebendiagonalen ist irreduzibel. (Insbesondere ist jede Tridiagonalmatrix mit dieser Gestalt irreduzibel.)

Die Aussage folgt aus der Betrachtung des gerichteten Graphen, der der Matrix zugeordnet ist. Die Matrix sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Dabei sind $a_{i,i+1} \neq 0$ *und* $a_{i+1,i} \neq 0$ *für alle* $i = 1, \dots, n-1$. *Im gerichteten Graph enthalten ist damit aber unabhängig von allen anderen Matrixelementen der Teilgraph*

$$P_1 \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} P_2 \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} P_3 \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} \cdots \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} P_{n-1} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} P_n.$$

Die Pfeile in der oberen Reihe entsprechen der Superdiagonalen und die unteren der Subdiagonalen.

Ü 37 Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ eignet sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

zur Durchführung des SOR-Verfahrens mit

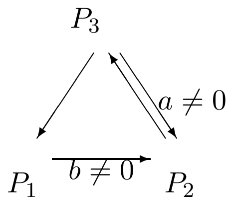
a) $0 < \omega \leq 1$?

b) $0 < \omega < 2$?

c) $0 < \omega \leq \omega_0, \omega_0 > 1$? (ω_0 nicht bekannt)

Entscheidend sind die Eigenschaften Diagonaldominanz, Irreduziblität, M-Matrix, Definitheit und Symmetrie.

- *Irreduzibilität: Der gerichtete Graph, der der Matrix A zugeordnet werden kann hat die Gestalt*



Damit ist die Matrix genau dann irreduzibel, wenn $b \neq 0$.

- *Diagonaldominanz: Die Matrix ist strikt diagonaldominant, wenn $|b| < 1$ und $|a| < 1$. Die "einfache" Diagonaldominanz bleibt erhalten, wenn $|b| \leq 1$ und $|a| \leq 1$.*
- *M-Matrix: Da A keine L-Matrix ist kommt die Eigenschaft M-Matrix also nicht in Frage.*
- *Symmetrie: Wegen $a_{31} \neq a_{13}$ ist die Matrix A unabhängig von a, b nicht symmetrisch. Damit spielt auch die Definitheit keine Rolle mehr.*

Es ergibt sich also folgendes Bild

a) *($0 < \omega \leq 1$) Für $0 < |b| \leq 1$ und $|a| \leq 1$ ist die Matrix irreduzibel diagonaldominant und falls $|b|, |a| < 1$ strikt diagonaldominant. In diesem Fällen ist SOR konvergent für $0 < \omega \leq 1$.*

b) *($0 < \omega < 2$) Da A nicht symmetrisch ist, kann die Konvergenz für $0 < \omega < 2$ mit der Tabelle nicht gezeigt werden.*

c) *($0 < \omega \leq \omega_0, \omega_0 > 1$) A ist zwar für bestimmte Werte von a, b irreduzibel, aber niemals eine M-Matrix. Damit ist auch diese Aussage aus der Tabelle nicht verwendbar.*

Ü 38 Finden Sie eine symmetrisch positiv definite Matrix A, für die das Jacobi-Verfahren nicht konvergiert.
Hinweis: Betrachten Sie Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Für das Jacobi-Verfahren gilt folgende Iterations-Vorschrift:

$$x^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Nimmt man eine Matrix A vom Typ aus dem Hinweis, dann erhält man

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + b, \qquad \textit{mit} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von G sind:

$$\det(G - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & -a & -a \\ -a & -\lambda & -a \\ -a & -a & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3a^2\lambda - 2a^3 = -(\lambda - a)^2(\lambda + 2a)$$

Die Eigenwerte von G sind a und $-2a$. Somit hat G den Spektralradius

$$\rho(G) = \max\{|a|, |-2a|\} = 2|a|.$$

Nach Satz 6.1.1 aus der Vorlesung, konvergiert das Verfahren genau dann, wenn der Spektralradius kleiner als 1 ist. Damit konvergiert das Verfahren nicht, wenn $|a| \geq \frac{1}{2}$ gilt.
Für die Matrix A gilt $A = I - G$. Damit hat A die Eigenwerte $1 + 2a$ und $1 - a$. (Sei λ ein Eigenwerte von G, d.h. es existiert ein Vektor x, so dass $Gx = \lambda x$ gilt. Dann ist $1 - \lambda$ ein Eigenwert von $I - G$, denn $(I - G)x = x - Gx = x - \lambda x = (1 - \lambda)x$.) Die Matrix A ist positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind, also wenn

$$\begin{aligned} 1 - a > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a < 1 \\ 1 + 2a > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit $-\frac{1}{2} < a < 1$ gilt.
Insgesamt erhält man: Für $\frac{1}{2} \leq a < 1$ ist die Matrix A positiv definit und symmetrisch, das Jacobi-Verfahren konvergiert jedoch nicht.

Hausübung

H 35 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welches der beiden zu folgenden Zerlegungen gehörenden Iterationsverfahren konvergiert für alle $x_0 \in \mathbb{R}^3$ gegen die Lösung x^* von $Ax^* = b,\ b \in \mathbb{R}^3$?

a) $G = D^{-1}(L+U)$ (Gesamtschrittverfahren)

b) $G = (D-L)^{-1}U$ (Einzelschrittverfahren)

a) *Für die Iterationsmatrix G folgt*

$$G = -\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

charakteristisches Polynom :

$$det(G - \lambda I) = -\lambda^3 + 1 - 1 - 2\lambda + 2\lambda + 0.25\lambda = -\lambda^3 + 0.25\lambda,$$

es hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \sqrt{0.25} = \pm 0.5$$

und damit ist $\rho(G) = 0.5$, *d.h. (globale) Konvergenz.*

b)

$$G = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die inverse Matrix gilt

$$(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & -0.25 & 0.5 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom :

$$det(G - \lambda I) = -\lambda((-0.25 - \lambda)(1 - \lambda) - 0.75) = -\lambda(\lambda^2 - 0.75\lambda - 1)$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = 0.375 \pm \sqrt{1 + (0.375)^2},$$

womit $\rho(M) = 1.443000$ *folgt und damit keine globale Konvergenz (genauer: zu jeder rechten Seite* b *existieren Startvektoren, sodaß das Iterationsverfahren nicht gegen* x^* *- und sogar überhaupt nicht - konvergiert).*

H 36 Bei der Diskretisierung einer 2-Punkt Randwertaufgabe einer gewöhnlichen DGL 2. Ordnung ist ein lineares Gleichungssystem entstanden. Die Matrix hat die Dimension $N \times N$, ist tridiagonal und hat folgende Struktur:

$$\frac{1}{h^2}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
2+h^2c & -1+\frac{h}{2}r & & & \\ \hline
-1-\frac{h}{2}r & 2+h^2c & -1+\frac{h}{2}r & & \\ \hline
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \hline
 & & -1-\frac{h}{2}r & 2+h^2c & -1+\frac{h}{2}r \\ \hline
 & & & -1-\frac{h}{2}r & 2+h^2c
\end{array}\right).$$

Dabei seien $r \in \mathbb{R}$ und $0 \leq c \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig. Welche Bedingungen muß man an die Schrittweite h stellen, damit die Matrix eine irreduzibel-diagonaldominate L-Matrix, also eine M-Matrix ist. Für die Schrittweite h gilt übrigens die Relation $h = \frac{1}{N}$ (je kleiner h desto größer die Matrix).

Falls auf der Diagonalen echt positive Elemente stehen und in den Nebendiagonalen echt negative Elemente, dann ist die Matrix eine L-Matrix und zugleich irreduzibel (siehe 1. Aufgabenblatt). Dann ist die Matrix aber auch automatisch einfach diagonaldominat, da

$$|-1-\frac{h}{2}r|+|-1+\frac{h}{2}r| = 1+\frac{h}{2}r+1-\frac{h}{2}r = 2 \leq |2+h^2c|$$

für alle $r \in \mathbb{R}$ *und* $0 \leq c \in \mathbb{R}$. *Die irreduzible Diagonaldominanz folgt dann aus der ersten bzw. letzten Zeile der Matrix, da dort die strikte Diagonaldominanz gilt.*

Auf der Diagonalen muß also $2 + h^2c > 0$ *gelten. Mit* $c \geq 0$ *ist dies keine Einschränkung an* h.

Auf den Nebendiagonalen ist $-1 + \frac{h}{2}|r| < 0$ *sicherzustellen. Daraus ergibt sich* $h < \frac{2}{|r|}$.

Für hinreichend kleine Gitterabstände h *ist die Matrix also immer eine M-Matrix.*

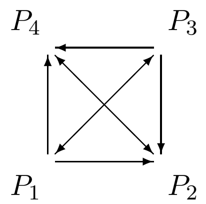
H 37 (*Eigenschaften von Matrizen*)

Untersuchen Sie die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 10 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & 4-a & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

auf die Eigenschaften Irreduzibilität, strikte und irreduzible Diagonaldominanz, L- und M-Matrix.

- *Matrix A*
  - *Irreduzibilität: Der gerichtete Graph, der der Matrix A zugeordnet werden kann hat die Gestalt*



Damit ist die Matrix reduzibel, da z.B. kein Weg von P_2 nach P_1 existiert, und damit kann sie nicht irreduzibel diagonaldominant sein.

- *Die Matrix A ist diagonaldominant, aber nicht strikt diagonaldominat, da*

$$\begin{aligned} 10 &> 3+2+1 \\ 3 &> 2 \\ 10 &\geq 3+3+4 \\ 7 &> 5 \end{aligned}$$

- *A ist weder L- noch M-Matrix.*

- *Matrix B*
  - *Irreduzibilität: Der gerichtete Graph, der der Matrix B zugeordnet werden kann hat die Gestalt*

$$\begin{tikzcd} P_4 \arrow[r] & P_3 \arrow[d] \\ P_1 \arrow[u] & P_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Damit ist die Matrix irreduzibel für alle a, da a nur auf der Diagonalen steht.

  - *Unabhängig von a ist die Matrix B nicht strikt digonaldominant aber*
  - *irreduzibel diagonaldominant für $a < -6$ oder $a > 0$:*

$$\begin{aligned} 3 &\geq 3 \\ |4-a| &> 4 \quad \text{für } a < 0 \quad \text{oder} \quad a > 8 \\ 3 &\geq 3 \\ 2 &\geq 2 \end{aligned}$$

  - *B ist eine L-Matrix für $a < 4$ und damit als irreduzibel diagonaldom. L-Matrix für $a < 0$.*
  - *eine M-Matrix für $a < 0$.*

H 38 Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_i &= 3x_{i+1} + b_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ x_n &= b_n. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß das Einzelschritt-Verfahren für alle Startwerte konvergiert.

b) Berechnen Sie mit $b = (0, \dots, 0, -3, 1)^T$, $n = 100$ und $x^{(0)} = (0, \dots, 0)^\top$ den Fehler $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty$ für alle Iterierten $k \in \mathbb{N}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

a) *Die Matrix des Gleichungssystems lautet*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & & & 0 \\ & 1 & -3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -3 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

und die Iterationsmatrix $G = (D - L)^{-1}U$ lautet

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & & & 0 \\ & 0 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 3 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

G ist also nilpotent und hat als einzigen Eigenwert $\lambda = 0$. Das charakteristische Polynom lautet

$$(-1)^n \lambda^n = 0.$$

Damit ist der Spektralradius $\rho(G) = 0$, und das Verfahren konvergiert. Ferner ist $G^n = 0$, und damit ist das Verfahren nach maximal n Schritten beendet.

b) Für den Fehler gilt

$$x^{(k)} - x^* = G^k(x^{(0)} - x^*).$$

Die exakte Lösung lautet $x^* = e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$. Folglich ergibt sich mit $x^{(0)} = (0, \ldots, 0)^\top$

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty = \|G^k e_n\|_\infty.$$

Aus der Form der Matrix G kann man nun folgende Rekursion ablesen:

$$\begin{aligned} Ge_n &= 3e_{n-1}, \\ G^2 e_n &= 9e_{n-2}, \\ &\vdots \\ G^k e_n &= \begin{cases} 3^k e_{n-k} & \text{falls } k < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Der Fehler hat also die Gestalt

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty = \begin{cases} 3^k & \text{falls } k < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Offensichtlich entfernt sich die Näherung zunächst rasant von der Lösung, bevor im n-ten Schritt die exakte Lösung erreicht wird. D.h., die Reduktion des Fehlers mit dem Spektralradius als Faktor tritt erst nach ausreichend vielen Schritten auf.