Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

18. Dezember 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 10

Präsenzübung

Ü 31 Man gebe $\vec{u}$ an, so daß

$$Q = I - \frac{2}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}\vec{u}^T$$

den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auf ein Vielfaches des ersten Koordinateneinheitsvektors transformiert. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis.

Ü 32 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist R aus einer QR–Zerlegung der Matrix A entstanden?

Ü 33 Um den Kehrwert einer Zahl $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ zu bestimmen, ohne eine Division durchzuführen, verwenden einige Computer ein Schema, das auf dem Newton–Verfahren basiert. Hierzu sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x} - a$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens so, daß keine Division Verwendung findet.

b) Berechnen Sie für $a = 0.75$ und den Startwert $x^{(0)} = 1.5$ zwei Schritte der Newton–Iteration.

c) Veranschaulichen Sie das Resultat an einer Skizze.

Ü 34 Das nichtlineare Gleichungssystem $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ mit

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 e^{(1-x_2)} \\ 5x_1 - 5x_2 + 4 \end{pmatrix},$$

soll näherungsweise mit dem Newton–Verfahren gelöst werden. Bestimmen Sie $\vec{x}^{(1)}$ für den Startwert $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hausübung

H 31 Gegeben seien die Meßdaten:

i	0	1	2
x_i	0	3	4
y_i	2	1	3
z_i	3	1	8

Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate und unter Verwendung der QR–Zerlegung t_1 und t_2 so, daß $t_1 x + t_2 y$ die Meßdaten z am besten wiedergibt und berechnen Sie die 2-Norm des Residuums.

Hinweis: Ein Householdermatrix–Vektor–Produkt der Form Ux wird stets berechnet wie folgt:

$$\left(I - \frac{2}{\vec{u}^T \vec{u}} \vec{u}\vec{u}^T \right) \vec{x} = \vec{x} - \frac{2\vec{u}^T \vec{x}}{\vec{u}^T \vec{u}} \vec{u}.$$

Benutzen Sie dies für die Spalten von Φ und die Inhomogenität.

H 32 Man beweise unter Verwendung des vereinfachten Newton-Verfahrens

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - A\vec{F}(\vec{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $A := (\mathcal{J}_{\vec{F}}(0,0))^{-1}$ und durch Anwendung von Satz 5.3.1, daß die Funktion

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)x + 0.2 \\ 2x + 4y + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)y - 0.2 \end{pmatrix}$$

im Quadrat $-0.4 \leq x, y \leq 0.4$ genau eine Nullstelle besitzt. Ein geeigneter Startwert ist $\vec{x}^{(0)} = (0,0)^T$.

H 33 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

b) Führen Sie vier Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Tragen Sie die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet, um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden?

d) Bestimmen Sie einen Startwert $x_0 \neq 0$ so, daß für den Wert nach dem ersten Schritt des Newton–Verfahrens $x_1 = -x_0$ gilt. Wie lauten die weiteren Folgenglieder?

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um eine Nullstelle zu finden?

H 34 Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 + \cos x_1 \\ \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, dass das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^2$ besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm und zeigen Sie, dass $L = \frac{4}{5}$ eine geeignete Wahl ist.

b) Geben Sie eine Schranke für die Anzahl der Iterationen an, die man höchstens benötigt, um die Lösung $\vec{x}^*$ mit der Iterationsvorschrift $\vec{x}^{(k+1)} = \Phi(\vec{x}^{(k)})$ ausgehend von $\vec{x}^{(0)} = (0,0)^T$ bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 10^{-3}$ zu berechnen.

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 10, Lösungsvorschlag

Präsenzübung

Ü 31 Man gebe $\vec{u}$ an, so daß

$$Q = I - \frac{2}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}\vec{u}^T$$

den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auf ein Vielfaches des ersten Koordinateneinheitsvektors transformiert. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis.

Der Vektor $\vec{u}$ für die Householdermatrix Q:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \begin{pmatrix} sign(x_1)(|x_1| + \|x\|_2) \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1(2+5) \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \beta &= \frac{2}{\vec{u}^T\vec{u}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} Q\vec{x} &= (I - \beta\vec{u}\vec{u}^T)\vec{x} = I\vec{x} - \beta(\vec{u}^T\vec{x})\vec{u} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{35} \cdot 35 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Vektor $\vec{x}$ wird also auf $-\|\vec{x}\|_2 e_1$ abbildet.

Ü 32 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist R aus einer QR–Zerlegung der Matrix A entstanden?

Nein! Beim ersten Schritt der QR–Zerlegung wird mit der orthogonalen Matrix U_1 die erste Spalte von A so gespiegelt, daß das Spiegelbild auf der ersten Koordinatenachse liegt, und zwar im Vorzeichen entgegengesetzt zum Vorzeichen von $a_{1,1}$. Die Norm der ersten Spalte von A ist 4, das Vorzeichen von $a_{1,1}$ positiv, also müsste $r_{1,1} = -4$ gelten.

Die Anwendung von Q ändert die Längen der Spalten in A nicht, die Länge der zweiten Spalte von A ist $\sqrt{6}$, die der zweiten Spalte von R aber $\sqrt{5}$.

Ü 33 Um den Kehrwert einer Zahl $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ zu bestimmen, ohne eine Division durchzuführen, verwenden einige Computer ein Schema, das auf dem Newton–Verfahren basiert. Hierzu sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x} - a$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens so, daß keine Division Verwendung findet.

b) Berechnen Sie für $a = 0.75$ und den Startwert $x^{(0)} = 1.5$ zwei Schritte der Newton–Iteration.

c) Veranschaulichen Sie das Resultat an einer Skizze.

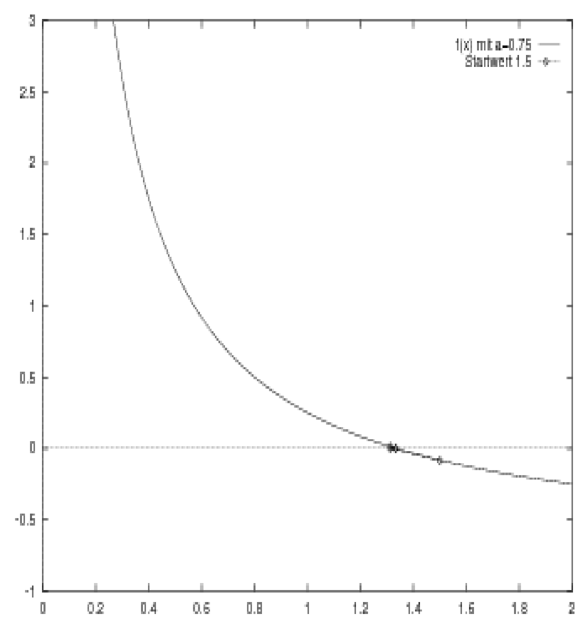
a) *Die Ableitung von f ist gegeben durch $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Damit lautet das Newton–Verfahren*

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{\frac{1}{x^{(k)}} - a}{-\frac{1}{(x^{(k)})^2}} \\ &= x^{(k)} + \left(\frac{1}{x^{(k)}} - a\right)(x^{(k)})^2 \\ &= 2x^{(k)} - a(x^{(k)})^2 \end{aligned}$$

b) *Die Iterationsfolge lautet*

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= 1.5 \\ x^{(1)} &= 1.3125 \\ x^{(2)} &= 1.333007813 \end{aligned}$$

c) *Eine Skizze zeigt das Verhalten der Folge.*



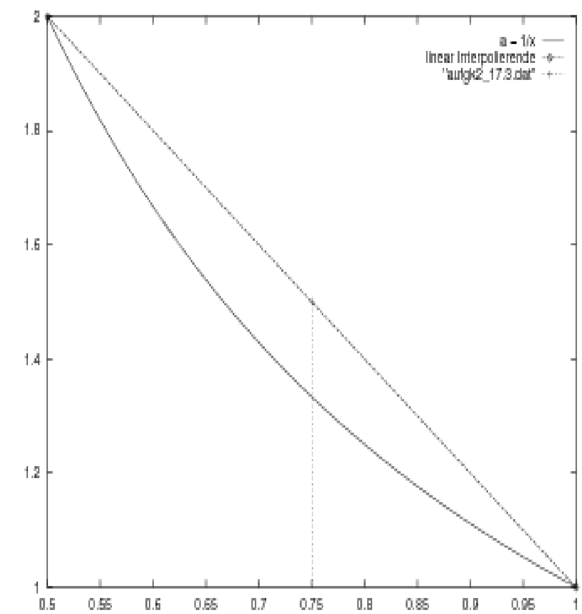
Das Newtonverfahren konvergiert hier nicht für alle Startwerte. Frage: Was sind hier sinnvolle Startwerte ?

Bemerkung: *Den Startwert erhält man durch eine erste Näherung, bei der man linear interpoliert. D.h. für ein $a \in \mathbb{R}$ sucht man ein $x \in \mathbb{R}$ so daß*

$$a - \frac{1}{x} = 0.$$

Da hier $a = 0.75$ ist, betrachten wir auch nur das Intervall $[0.5, 1[$ für a. Das Reziprok von 1 ist 1 bzw. von 0.5 ist 2. Wenn man nun linear interpoliert, das bedeutet man berechnet den Wert von x auf der Geraden, die die Punkte $(0.5, 2)$ und $(1, 1)$ verbindet, so erhält man für $a = 0.75$ die Näherung

$$x = 2 + (0.75 - 0.5)\frac{2-1}{0.5-1} = 1.5.$$



Diese Näherung nimmt man anschließend als Startwert für das Newton-Verfahren.

Ü 34 Das nichtlineare Gleichungssystem $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ mit

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 e^{(1-x_2)} \\ 5x_1 - 5x_2 + 4 \end{pmatrix},$$

soll näherungsweise mit dem Newton–Verfahren gelöst werden. Bestimmen Sie $\vec{x}^{(1)}$ für den Startwert $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Jacobimatrix der Funktion $\vec{F}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{J}_{\vec{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4 & -(1-x_2)e^{(1-x_2)} \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_{\vec{F}}(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Für

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - (\mathcal{J}_{\vec{F}}(\vec{x}^{(k)}))^{-1}\vec{F}(\vec{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{x}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.05 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Hausübung

H 31 Gegeben seien die Meßdaten:

i	0	1	2
x_i	0	3	4
y_i	2	1	3
z_i	3	1	8

Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate und unter Verwendung der QR–Zerlegung t_1 und t_2 so, daß $t_1 x + t_2 y$ die Meßdaten z am besten wiedergibt und berechnen Sie die 2-Norm des Residuums.

Hinweis: Ein Householdermatrix–Vektor–Produkt der Form Ux wird stets berechnet wie folgt:

$$\left(I - \frac{2}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}\vec{u}^T\right)\vec{x} = \vec{x} - \frac{2\vec{u}^T\vec{x}}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}.$$

Benutzen Sie dies für die Spalten von Φ und die Inhomogenität.

Durch die Gleichungen $z_i = t_1 x_i + t_2 y_i$ ergibt sich die Matrix Φ:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

und der Vektor $\vec{z}$:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Der erste Householder–Schritt wird bestimmt durch

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} sign(0)(|0| + \sqrt{0^2+3^2+4^2}) \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. *Umrechnung der ersten Spalte von A:*
   Nach Konstruktion der Matrix U_1 ergibt sich (die erste Spalte wird auf das Vielfache eines Einheitsvektors abgebildet):

$$\vec{\phi}_1^{(1)} = U_1\vec{\phi}_1 = \begin{pmatrix} -sign(0)\cdot\sqrt{0^2+3^2+4^2}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Umrechung der zweiten Spalte von Φ:*

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_2^{(1)} &= U_1\ \vec{\phi}_2 = \vec{\phi}_2 - \frac{2\vec{u}_1^T\vec{\phi}_2}{\vec{u}_1^T\vec{u}_1}\vec{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2(5\ 3\ 4)\cdot(2\ 1\ 3)^T}{(5\ 3\ 4)\cdot(5\ 3\ 4)^T}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. *Umrechnung des Vektors b:*

$$\begin{aligned}
b^{(1)} &= U_1\ b = b - \frac{2\vec{u}_1^T b^T}{\vec{u}_1^T \vec{u}_1}\vec{u}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{2(5\ 3\ 4)\cdot(3\ 1\ 8)^T}{(5\ 3\ 4)\cdot(5\ 3\ 4)^T}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der zweite Householder–Schritt ist gegeben durch den Vektor

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ sign(-2)(|-2| + \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1\cdot(2+\sqrt{5}) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2-\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Umrechnung der ersten Spalte von $U_1\Phi$: Nach Konstruktion der Matrix U_2 bleibt die erste Spalte von $U_1\Phi$ unverändert:*

$$\vec{\phi}_1^{(2)} = (U_2U_1\Phi)_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Umrechnung der zweiten Spalte von $U_1\Phi$: Nach Konstruktion der Matrix U_2 ergibt sich*

$$\vec{\phi}_2^{(2)} = (U_2U_1\Phi)_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -sign(-2)\cdot\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt:

$$U_2U_1\Phi = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Umrechnung des Vektors $U_1\vec{z}$:*

$$\begin{aligned}
\vec{z}^{(2)} &= U_2U_1\vec{z} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2(0\ \ -2-\sqrt{5}\ \ -1)\cdot(-7\ \ -5\ \ 0)^T}{(0\ \ -2-\sqrt{5}\ \ -1)\cdot(0\ \ -2-\sqrt{5}\ \ -1)^T}\begin{pmatrix} 0 \\ -2-\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \sqrt{5}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2-\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -10-2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$U_2U_1\Phi = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2U_1\vec{z} = \begin{pmatrix} -7 \\ -10-2\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Für die Bestimmung von t_1 und t_2 erhalten wir damit das folgende LGS:

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -10-2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

und das Residuum ist

$$\vec{r} = (-\sqrt{5}).$$

Daraus ergibt sich die Lösung

$$t_2 = -2 - 2\sqrt{5} \approx -6.4721, \quad t_1 = \frac{11 + 6\sqrt{5}}{5} \approx 5.2833.$$

Die Norm des Residuums ist

$$\|\vec{r}\|_2 = \|(-\sqrt{5})\|_2 = \sqrt{5}.$$

H 32 Man beweise unter Verwendung des vereinfachten Newton-Verfahrens

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - A\vec{F}(\vec{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $A := (\mathcal{J}_{\vec{F}}(0,0))^{-1}$ und durch Anwendung von Satz 5.3.1, daß die Funktion

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)x + 0.2 \\ 2x + 4y + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)y - 0.2 \end{pmatrix}$$

im Quadrat $-0.4 \leq x, y \leq 0.4$ genau eine Nullstelle besitzt. Ein geeigneter Startwert ist $\vec{x}^{(0)} = (0, 0)^T$.

Die Jacobimatrix der Funktion $\vec{F}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{J}_{\vec{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 + x^2 + \frac{1}{3}y^2 & 2 + \frac{2}{3}xy \\ 2 + \frac{2}{3}xy & 4 + \frac{1}{3}x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \mathcal{J}_{\vec{F}}(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Inverse der Jacobi-Matrix gegeben durch

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

und die Iterationsfunktion $\Phi(\vec{x})$ lautet

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x^2 + y^2)x + 0.2 \\ \frac{1}{3}(x^2 + y^2)y - 0.2 \end{pmatrix}$$

Die Jacobimatrix von $\Phi(\vec{x})$ ist somit

$$\mathcal{J}_\Phi(\vec{x}) \quad = \quad -\tfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 + \frac{1}{3}y^2 & \frac{2}{3}xy \\ \frac{2}{3}xy & \frac{1}{3}x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Die Kontraktion wird mit Hilfe von Satz 5.3.1 gezeigt. Für $(x, y) \in [-0.4, 0.4]^2$ gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}_\Phi(x)\|_\infty &\leq \tfrac{1}{8} \cdot 6 \cdot (0.4)^2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \tfrac{6}{25} = 0.24 < 1 \end{aligned}$$

Eine mögliche Lipschitzkonstante ist demnach $L = 0.24$.

Die Selbstabbildung wird ebenfalls Satz 5.3.1 nachgewiesen.

$$\vec{x}^{(1)} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\delta = \|\vec{x}^{(0)} - \vec{x}^{(1)}\|_\infty \frac{1}{1-L} = \frac{3}{20} \cdot \frac{25}{25-6} = 0.1974 < 0.4.$$

Damit ist die Selbstabbildung auf einer Teilmenge von $[-0.4, 0.4]^2$ *gezeigt und die Existenz der Lösung ist gesichert.*

H 33 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

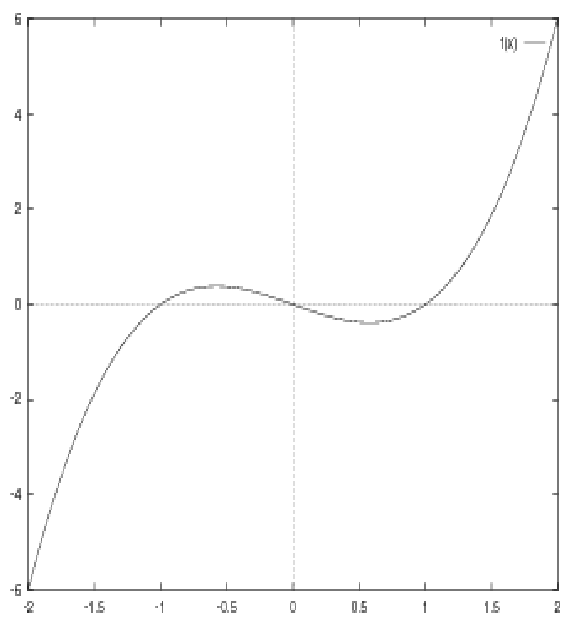
b) Führen Sie vier Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Tragen Sie die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet, um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden?

d) Bestimmen Sie einen Startwert $x_0 \neq 0$ so, daß für den Wert nach dem ersten Schritt des Newton–Verfahrens $x_1 = -x_0$ gilt. Wie lauten die weiteren Folgenglieder?

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um eine Nullstelle zu finden?

a) *Der Graph der Funktion f hat folgende Gestalt*



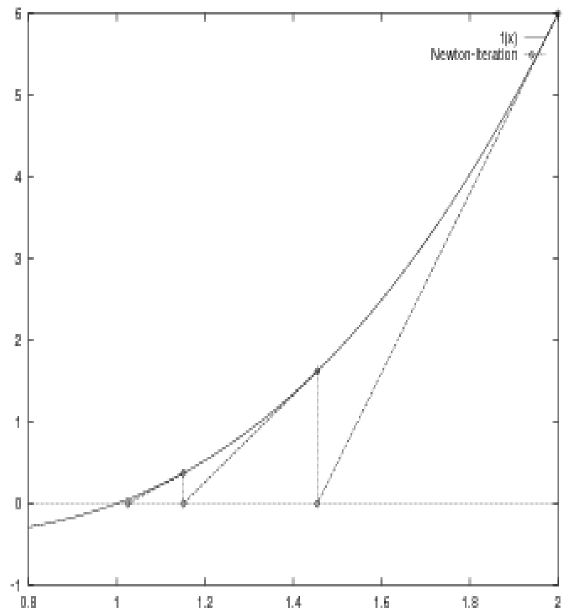
b) *Die Iterationsvorschrift des eindimensionalen Newton–Verfahrens ist gegeben durch*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Iterationsfolge lautet damit

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$
0	2.0000E+00	6.0000E+00	1.1000E+01
1	1.4545E+00	1.6228E+00	5.3471E+00
2	1.1510E+00	3.7399E-01	2.9747E+00
3	1.0253E+00	5.2592E-02	2.1538E+00
4	1.0009E+00	1.8194E-03	2.0055E+00

Graphisch stellt sich die Iteration so dar



c) *Nein! Mit dem Startpunkt* $x^{(0)} = 0.51$ *ergibt sich die Iterationsfolge*

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$
0	5.1000E-01	-3.7735E-01	-2.1970E-01
1	-1.2075E+00	-5.5332E-01	3.3746E+00
2	-1.0436E+00	-9.2986E-02	2.2673E+00
3	-1.0058E+00	-5.1969E-03	2.0156E+00

Graphisch bedeutet dies, daß die Tangente in $x^{(0)} = 0.51$ *die x-Achse unterhalb* -1 *schneidet. Anhand des Graphen ist aber leicht einzusehen, daß eine Iterationsfolge, die einmal unterhalb* -1 *bzw. oberhalb* 1 *angelangt ist, diese Bereiche nicht mehr verläßt.*

d) *Die Bedingung führt zur Gleichung*

$$x_0 - \frac{x_0^3 - x_0}{3x_0^2 - 1} = -x_0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 = 0$ *und* $x_{2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$*. Für* $x^{(0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ *wird die Iteration in eine Endlosschleife eintreten, die zwischen diesen beiden Werten alterniert.*

e) *Ganz und gar ungeeignet sind die beiden Extremalpunkte* $x_T = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *und* $x_H = -\frac{1}{\sqrt{3}}$*, da dort die Tangenten waagerecht sind und die x-Achse niemals schneiden. Algebraisch bedeutet dies* $f'(x) = 0$ *im Nenner!*

Ebenfalls ungeeignete Startpunkt sind $x^{(0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ aus Aufgabenteil d), da diese in eine Endlosschleife führen.

H 34 Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 + \cos x_1 \\ \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, dass das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^2$ besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm und zeigen Sie, dass $L = \frac{4}{5}$ eine geeignete Wahl ist.

b) Geben Sie eine Schranke für die Anzahl der Iterationen an, die man höchstens benötigt, um die Lösung $\vec{x}^*$ mit der Iterationsvorschrift $\vec{x}^{(k+1)} = \Phi(\vec{x}^{(k)})$ ausgehend von $\vec{x}^{(0)} = (0,0)^T$ bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 10^{-3}$ zu berechnen.

a) *Zuerst muss das Gleichungssystem in Fixpunktform überführt werden. Dies kann geschehen durch Multiplikation mit der inversen Matrix:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} x_2 + \cos x_1 \\ \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \tfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_2 + \cos x_1 \\ \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_\Phi(\vec{x})$ lautet

$$\mathcal{J}_\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 1 \\ \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

In der ∞-Norm kann die Jacobi-Matrix abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}_\Phi(\vec{x})\|_\infty &\leq \frac{1}{10} \left\| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty \cdot \left\| \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 1 \\ \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{10} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{4}{5} < 1. \end{aligned}$$

Damit ist die Kontraktionsbedingung erfüllt. Wegen $\Phi(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^2$ und der Abgeschlossenheit von $\mathbb{R}^2$ sind alle Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, so dass das Verfahren gegen die eindeutige Lösung konvergiert.

b) *Es ist* $\vec{x}^{(1)} = \Phi(\vec{x}^{(0)}) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Mit* $L = \frac{4}{5}$ *liefert der Fixpunktsatz von Banach folgende Fehlerabschätzung:*

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\|_\infty \leq \frac{L^k}{1-L}\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_\infty = \left(\frac{4}{5}\right)^k \cdot 5 \cdot \frac{4}{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^k \cdot 2$$

Um $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\|_\infty \leq 10^{-3}$ *zu sichern, genügt es, wenn* $\left(\frac{4}{5}\right)^k 2 \leq 10^{-3}$ *erfüllt ist:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{5}\right)^k 2 &\leq 10^{-3} \\ \left(\frac{4}{5}\right)^k &\leq \frac{10^{-3}}{2} \\ \ln\left(\frac{4}{5}\right)^k &\leq \ln\frac{10^{-3}}{2} \\ k &\geq \frac{\ln(\frac{10^{-3}}{2})}{\ln(\frac{4}{5})} \approx 34.06 \end{aligned}$$

Damit wird nach 35 Schritten auf jeden Fall die gewünschte Genauigkeit erreicht sein.