Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11. Dezember 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 9

Präsenzübung

Ü 27 **a)** Skizzieren Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ die Menge $\{Ax \mid \|x\|_\infty = 1\}$.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$ mit Hilfe des Aufgabenteils a).

Hinweis: Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}$.

Ü 28 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahl $\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$.

b) Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung in der Maximumnorm ab, wenn der Gauß-Algorithmus statt mit der Matrix A mit einer Matrix $\tilde{A}$ und statt mit der rechten Seite $\vec{b}$ mit dem Vektor $\tilde{\vec{b}}$ gerechnet wird und gilt:

$$\|\tilde{A} - A\|_\infty \leq 0.02 \qquad \text{und} \qquad \|\tilde{\vec{b}} - \vec{b}\|_\infty \leq 0.001.$$

c) Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems und des mit folgenden Matrizen gestörten Gleichungssystems

$$\tilde{A} - A = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\vec{b}} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie den Unterschied beider Ergebnisse mit der in b) gemachten Abschätzung.

Ü 29 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, indem Sie sie wie folgt zerlegen:
$A = D + B = D(I + D^{-1}B)$, wobei D eine Diagonalmatrix mit $d_{ii} = a_{ii}$ $(i = 1, 2, 3)$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 4.5.5

Ü 30 Gegeben sei eine Tabelle von Meßwerten:

i	1	2	3	4
t_i	1	2	3	4
y_i	1	2	2	3

Zur Approximation der "Punktwolke" (t_i, y_i) soll der Ansatz $x_1 + x_2 t + x_3 t^2$ verwendet werden.

a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_3$ und die Matrix Φ.

b) Stellen Sie das Normalgleichungssystem auf und lösen Sie es mit einem geeigneten Verfahren.

c) Skizzieren Sie die Lösung.

d) Berechnen Sie die 2-Norm des Residuums $\vec{r}$.

Hausübung

H 27 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 1000 \\ 10^{-7} & 0.8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Spektralradius von A sowie $||A||_\infty$ und $||A||_1$. (Bem.: Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{||A\vec{x}||_\infty}{||\vec{x}||_\infty} \leq \frac{||A\vec{x}||_2}{||\vec{x}||_2} \leq \sqrt{n}\frac{||A\vec{x}||_\infty}{||\vec{x}||_\infty}$$

sodaß die Betrachtung von $||.||_2$ nichts wesentlich Neues bringt). Konstruieren Sie eine Vektornorm $||.||_T$, sodaß in der zugeordneten Matrixnorm

$$||A||_T \leq 0.95$$

gilt.

H 28 Zeigen Sie ohne Anwendung des Gauß'schen Algorithmus oder einer anderen Methode zur Berechnung von $\det(A)$, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 3 \\ 5 & 100 & -3 \\ -0.5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.
Hinweis: Zerlegen Sie $A = D_1 B D_2$, mit geeigneten invertierbaren Diagonalmatrizen D_1 und D_2.

H 29 Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungssysteme und werten Sie mit den Resultaten die Fehlerabschätzung von Satz 4.5.6 aus:

$$\frac{||\vec{x} - \tilde{\vec{x}}||}{||\vec{x}||} \lessapprox \operatorname{cond}(A)\Big(\frac{||A - \tilde{A}||}{||A||} + \frac{||\vec{b} - \tilde{\vec{b}}||}{||\vec{b}||}\Big)$$

$$A = \begin{pmatrix} 111 & 98 & 91 \\ 98 & 104 & 98 \\ 91 & 98 & 111 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

und

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 110.9764 & 97.9764 & 90.9764 \\ 98.0471 & 104.0471 & 98.0471 \\ 90.9764 & 97.9764 & 110.9764 \end{pmatrix} \quad \tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 0.6182 \\ 0.4957 \\ 0.6182 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}\tilde{\vec{x}} = \tilde{\vec{b}}$$

H 30 Lineare Ausgleichsrechnung ist auch in mehr als einer Raumdimension möglich. Im $\mathbb{R}^3$ seien folgende Punkte gegeben:

s_i	0	1	0	1
t_i	0	0	1	1
y_i	0	1	1	3

Lösen Sie das zweidimensionale Ausgleichsproblem für den linearen Ansatz

$$y(s,t) = x_1 + x_2 s + x_3 t.$$