Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27. November 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 7

Präsenzübung

Ü 20 Man zeige: Die implizite Mittelpunktregel

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{i+1}^h &= y_i^h + hk_1 \end{aligned}$$

ist A-stabil.

Ü 21 **a)** Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie, warum die Eigenwerte von A reell sind und geben Sie mit dem Kreissatz von Gerschgorin Intervalleinschließungen für die Eigenwerte an.

b) Führen Sie eine Ähnlichkeitstransformation auf die Matrix $B = S^{-1}AS$ mit einer Diagonalmatrix $S = \mathrm{diag}(1, 1, \delta)$ durch. Dabei bleiben die Eigenwerte unverändert. Bestimmen Sie für welche $\delta > 0$ die Intervalle um 1 und um 6 disjunkt sind.
Zusatz: Geben Sie ein möglichst kleines Intervall für einen Eigenwert in der Nähe der 1 an.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = A\vec{y}\ , \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 20 & -170 & 80 \\ 100 & 100 & -10^5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß alle Eigenwerte von A reell und negativ sind und bestimmen Sie eine möglichst grosse Schrittweite h, für die das explizite Eulerverfahren die Aufgabe noch absolut stabil integriert.

Ü 22 Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}\ , \quad y(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der exakten Lösung $\vec{y}(t) = (\sin(t), \cos(t))^T$. Für die Koeffizientenmatrix dieses Systems gilt die Darstellung (Spektralzerlegung)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \imath/\sqrt{2} & -\imath/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & -\imath \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\imath/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \imath/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = U\Lambda U^H$$

und die Eigenvektormatrix ist unitär. Welche Formeln erhält man (in Matrixnotation), wenn man $\vec{y}_N^h$ mit $Nh = t$ für diese Anfangswertaufgabe mit dem expliziten und dem impliziten Eulerverfahren berechnet? Welchen Wert hat $||\vec{y}_N^h||^2$? Welche Konsequenz ziehen Sie daraus?

Hausübung

H 20 Es sei das folgende zweistufige Runge–Kutta–Verfahren gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion und überprüfen Sie, ob das Verfahren A-stabil ist.

H 21 Konstruktion eines Lösungsverfahrens für AWP

Gegeben sei die gewöhnliche DGL $y'(t) = f(t, y(t))$. Die Lösung eines zugehörigen AWP soll auf einem Gitter $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots$ approximiert werden. Verwenden Sie zur Konstruktion eines Lösungsverfahrens folgendes Schema:

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_2(t)$ in den Stützstellen (t_{i-1}, y_{i-1}), (t_i, y_i) und (t_{i+1}, y_{i+1}).

Ersetzen Sie die Ableitung $y'(t_{i+1})$ durch die Ableitung des Interpolationspolynoms im Punkt t_{i+1}, und ersetzen Sie auf der rechten Seite der Differentialgleichung $y(t_{i+1})$ durch y_{i+1}. Im ersten Schritt wird bei diesem Verfahren zur Berechnung von y_3 neben dem Anfangswert y_1 auch ein Wert für y_2 benötigt. Wie kann man diesen erhalten? Bedenken Sie, daß Ihr hier konstruiertes implizites Verfahren A-stabil ist .

Bem.: Angewandt auf die Testgleichung entsteht hier die lineare Differenzengleichung

$$(1 - \tfrac{2z}{3})y_{i+2} + \tfrac{1}{3}y_{i+1} - \tfrac{4}{3}y_i \;=\; 0 \;.$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$y_i \;=\; c_1(v_1)^i + c_2(v_2)^i$$

mit den Potenzen der beiden Nullstellen v_1 und v_2 der quadratischen Gleichung

$$(1 - \tfrac{2z}{3})v^2 + \tfrac{1}{3}v - \tfrac{4}{3} \;=\; 0$$

die für $\Re(z) < 0$ stets betragsmässig kleiner als eins sind.

H 22 Schrittweitensteuerung

Gegeben seien ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2,3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \tilde{\gamma}_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} k_1 &=& f(t, y) \\ k_2 &=& f(t + h, y + hk_1) \\ k_3 &=& f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{4}(k_1 + k_2)) \\ \Phi_1 &=& \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ \Phi_2 &=& \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + 4k_3) \end{array} \right.$$

Man führe damit das Verfahren zur Schrittweitensteuerung durch für die Anfangswertaufgabe

$$y' \;=\; y^2 + 1 \;, \quad y(\tfrac{\pi}{4}) \;=\; 1$$

am Anfangswert mit der Versuchschrittweite $\tilde{h}_0 \;=\; 0.1$, der geforderten Genauigkeit $\epsilon \;=\; 10^{-4}$ und der Intervalllänge $\frac{\pi}{4}$