Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20. November 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 6

Präsenzübung

Ü 17 Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = y + t + 1 \,, \quad y(0) = -1$$

mit dem expliziten Eulerverfahren, dem Verfahren von Heun der Ordnung 2 und dem klassischen vierstufigen Rungekuttaverfahren der Ordnung 4 an der Stelle $t = h = 0.2$.

Ü 18 **Runge-Kutta.** Gegeben sei das Koeffizientenschema eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

a) Welche Formel erhält man für y_1, wenn man das dadurch definierte Verfahren auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \qquad y(0) = 1$$

anwendet?

b) Mit welcher Potenz in h geht der Fehler $y_1 - y(h)$ gegen 0, wenn $h \to 0$? Wie groß wird demnach die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens sein?

Ü 19 Gegeben sei ein explizites Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_i(t_j, h) &= f(t_j + \alpha_i h, y_j + h \cdot \sum_{l=1}^{m} \beta_{il} k_l(t_j, h)), \qquad i = 1, \dots, m \\ y_{j+1} &= y_j + h \cdot \sum_{i=1}^{m} \gamma_i k_i(t_j, h). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$$

das Verfahren die Konsistenzordnung 1 hat.

Hinweis: Es ist $f(t + \alpha h, y + h \cdot k(t,h)) = f(t,y) + O(h)$, falls $f(t,y)$ eine differenzierbare Funktion von t und y ist.

Hausübung

H 17 Zeigen Sie, daß die durch die Verfahrensfunktion

$$\Phi(t, y; h, f) = (1-c)f(t,y) + cf\left(t + \frac{h}{2c}, y + \frac{h}{2c}f(t,y)\right) \quad , \quad c \neq 0$$

definierte Klasse von Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt.

H 18 Runge-Kutta-Verfahren im $\mathbb{R}^2$
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie einen Schritt des klassischen Runge–Kutta–Verfahrens, um Näherungen für $y_1(0.1)$ und $y_2(0.1)$ zu berechnen. Die Schrittweite ist $h = 0.1$.

H 19 Gegeben sei ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2,3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \tilde{\gamma}_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} k_1 & = & f(t,y) \\ k_2 & = & f(t+h, y+hk_1) \\ k_3 & = & f(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{4}(k_1+k_2)) \\ \Phi_1 & = & \frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ \Phi_2 & = & \frac{1}{6}(k_1+k_2+4k_3) \end{array} \right.$$

und die homogene lineare autonome DGL $y' = \lambda y$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$. Rechnen Sie formal je einen Schritt mit beiden Verfahren mit der Schrittweite h. Wie lautet der Abschneidefehler der beiden Verfahren? Wie lautet die Differenz

$$h(\Phi_2(0,1,h;f) - \Phi_1(0,1,h;f))$$

Welche Anwendung sehen Sie in dieser Konstruktion?