Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13. November 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 5

Präsenzübung

Ü 14 Gauß-Quadratur

Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t$$

näherungsweise mit der 3-Punkt Gauß-Quadratur-Formel und schätzen Sie den Quadraturfehler ab.

Hinweis: $\left| \frac{\mathrm{d}^6}{\mathrm{d}t^6} \frac{e^t}{t} \right| \leq 190$ für $t \in [2, 3]$.

Ü 15 (**Doppelintegrale**)

Doppelintegrale lassen sich oft durch Hintereinanderausführen zweier einfacher Integrationen bestimmen. Gesucht sind die Gewichte ω_{ij} von

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \ \mathrm{d}y\mathrm{d}x \approx \frac{h_x h_y}{4} \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} \omega_{ij} f(x_i, y_j),$$

$x_i = a + ih_x,\ y_j = c + jh_y,\ h_x = \frac{b-a}{n_x},\ h_y = \frac{d-c}{n_y}$.

Dabei soll zur Bestimmung von

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \ \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad I = \int_a^b F(x) \ \mathrm{d}x$$

die zusammengesetzte Trapezregel benutzt werden.

Ü 16 (**Schwerpunktregel**)

Wir betrachten das Dreieck T mit den Eckpunkten (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k). Gesucht ist eine Quadraturformel der Form

$$\int_T f(x, y)\mathrm{d}(x, y) \approx w_0 f(x_0, y_0).$$

Bestimmen Sie den Knoten (x_0, y_0) und das Gewicht w_0 so, daß die Quadraturformel für affin-lineare Funktionen exakt ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst den Knoten und das Gewicht für das Standarddreieck mit den Ecken (0,0), (1,0), (0,1). Zur Auswertung des allgemeinen Falls benutzen Sie die Transformation auf das Standarddreieck.

Hausübung

H 14 Bereichsintegrale. Es sei der Bereich

$$B = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

gegeben. Wieviele Funktionsauswertungen werden mindestens benötigt um eine lineare Funktion $f(x,y) = a + bx + cy$ exakt über dem Bereich B zu integrieren? Geben Sie die Knoten und die Gewichte der entsprechenden Quadraturformel an.

Hinweis: Schreiben Sie das Integral als ein Doppelintegral und verwenden Sie für beide Integrale die Gauß-Quadratur.

H 15 (**Transformation auf das Standarddreieck, Formel von Collatz und Albrecht**)
Verwenden Sie die Formel von Collatz und Albrecht

$$\int\limits_{T_0} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{1}{60}\left[f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},0) + f(0,\frac{1}{2})\right] + \frac{9}{60}\left[f(\frac{1}{6},\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{6},\frac{4}{6}) + f(\frac{4}{6},\frac{1}{6})\right]$$

um die Funktion $f(x,y) = x^3+y^3+x^2y+xy^2$ auf dem Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,1),\ (3,0)$ und $(4,4)$ zu integrieren.

H 16 Adaptive Quadratur Als Integrator für eine adaptive Quadratur soll im Folgenden die Simpsonregel benutzt werden. Das Ziel soll die Bestimmung von

$$\int_{1/2}^{1} \tan(x)\mathrm{d}x$$

mit einem Fehler von höchstens $\delta = 10^{-6}$ sein. Als erste Versuchsschrittweite werde jedoch nicht $1/2$, sondern $\tilde{H}_0 = 0.2$ benutzt. Führen Sie das Verfahren aus bis das erste Teilintervall akzeptiert wird. Im Falle des Verwerfens mit $\kappa < 1$ soll nach Möglichkeit $\tilde{H}_0$ halbiert werden, um wenigstens 3 alte Funktionswerte noch einmal benutzen zu können.