Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

30. Oktober 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 3

Präsenzübung

Ü 7 bilineare Interpolation im $\mathbb{R}^2$.

a) Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Ecken des Quadrates $I \times I$, $I = [0, 1]$.

x	0	1	0	1
y	0	0	1	1
f	2	1	3	5

Interpolieren Sie bilinear, d.h. bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom der Form:

$$P_{1,1}(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

b) Wiederholen Sie dies mit dem um $\pi/4$ gedrehten Quadrat

x	-1	1	0	0
y	0	0	-1	1
f	1	-1	2	0

Ü 8 Stückweise affin lineare und stetige Interpolation auf einer Triangulierung

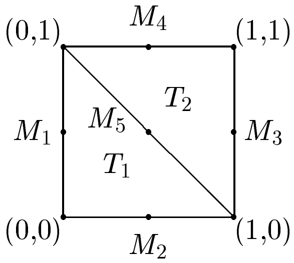
Gegeben seien die Daten

	P_0	P_1	P_2	P_3
x	0	1	0	1/3
y	0	0	1	1/3
z	0	0	0	2

Stellen Sie dazu eine Triangulierung auf und bestimmen Sie die stetige stückweise affin lineare Interpolierende.

Ü 9 Lokale Eindeutigkeit und globale Stetigkeit , Grad=2

Gegeben ist folgende Triangulation des Einheitsquadrates $[0,1]^2$:



a) Zeigen Sie, daß durch die Vorgabe der Funktionswerte an den Ecken und an den Seitenmittelpunkten M_i der beiden Dreiecke T_j jeweils eine quadratische Funktion

$$g_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 xy + e_1 x^2 + f_1 y^2 \ ,$$
$$g_2(x) = a_2 + b_2(1-x) + c_2(1-y) + d_2(1-x)(1-y) + e_2(1-x)^2 + f_2(1-y)^2$$

eindeutig definiert ist.

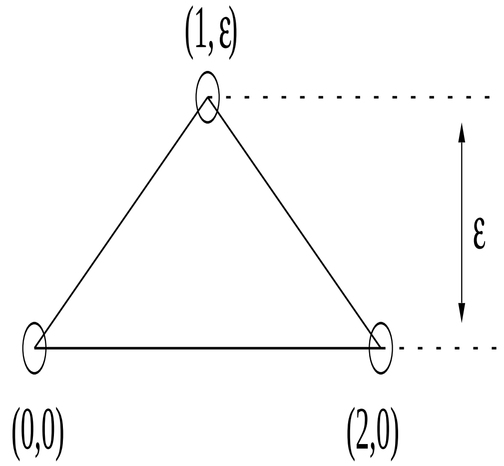
b) Ist die zusammengesetzte Funktion

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \in T_1 \\ g_2(x) & x \in T_2 \end{cases}$$

immer stetig auf $[0,1]^2$?

Hausübung

H 7 (**Lineare Interpolation in 2D: schlecht gewähltes Dreieck**)
Gegeben sei eine Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ und das Dreieck mit den Ecken $(0,0),(2,0),(1,\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$.



a) Interpolieren Sie die Funktion f durch eine (affin) lineare Funktion $l_\varepsilon(x,y) = ax + by + c$, wobei die Stützstellen gleich den Ecken des Dreiecks sind.

b) Berechnen Sie den Fehler $\|\nabla f(1,0) - \nabla l_\varepsilon(1,0)\|$. Wie verhält sich der Fehler für $\varepsilon \to 0$? Vergleichen Sie dies mit der Fehlerabschätzung aus Satz 1.4.2.

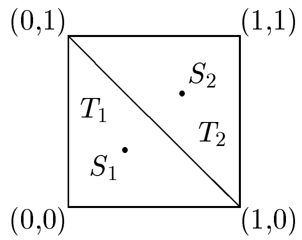
H 8 **Tensorproduktinterpolation ist einfach**
Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Ecken des Würfels I^3, $I = [0,1]$.

x	0	1	0	1	0	1	0	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	0	0	0	1	1	1	1
f	1	3	2	6	1	1	5	3

Interpolieren Sie trilinear, d.h. bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom der Form:

$$P_{1,1,1}(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$$

H 9 **lokale Eindeutigkeit impliziert nicht Stetigkeit**
Gegeben ist folgende Triangulation des Einheitsquadrates $[0,1]^2$:



a) Zeigen Sie, daß durch die Vorgabe der Funktionswerte an den Ecken und an den Schwerpunkten S_j der beiden Dreiecke T_j jeweils eine bilineare Funktion

$$f_j(x) = a_j + b_j x + c_j y + d_j xy, \quad j = 1, 2$$

eindeutig definiert ist.

b) Zeigen Sie durch eine spezielle und unsymmetrische Funktionswertvorgabe, daß die zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in T_1 \\ f_2(x) & x \in T_2 \end{cases}$$

nicht stetig ist auf $[0, 1]^2$.