Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

23. Oktober 2007

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 2

Präsenzübung

Ü 4 Inverse Interpolation.

Gegeben seien die folgenden Werte der Funktion $f(x) = 2x - \sin(x)$:

x	0.0	0.48160	0.88786
$f(x)$	0.0	0.5	1.0

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv.

Gesucht ist x^* mit $f(x^*) = \frac{3}{4}$.

a) Approximieren Sie x^*, indem Sie zu den gegebenen Daten eine Polynom–Interpolation für die Umkehrfunktion f^{-1} durchführen.

b) Geben Sie für den gefundenen Wert $p(\frac{3}{4})$ eine Fehlerabschätzung an.

<u>Hinweis:</u> Die höheren Ableitungen der Umkehrfunktion erhält man durch Differenzieren von

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Ü 5 Man bestimme den natürlichen, interpolierenden, kubischen Spline zu den Daten

i	0	1	2	3	4
x_i	-3	-2	0	1	2
y_i	0	2	2	11	18

Ü 6 Es sei

x	1	3	4	5	8
y	0	2	3	4	7

Wie lautet der natürliche interpolierende kubische Spline zu diesen Daten? Bitte begründen Sie Ihre Antwort genau.

Hausübung

H 4 Interpolationspolynome können verwendet werden, um Integrale über Funktionen in einem Intervall $[a,b]$ nur durch Funktionsauswertungen zu approximieren. Eine Variante ergibt sich, wenn die Funktion an den Punkten $x_1 = a + \frac{1}{3}(b-a)$ und $x_2 = a + \frac{2}{3}(b-a)$ ausgewertet wird und die lineare Interpolierende integriert wird.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = (b-a)(\omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)).$$

Berechnen Sie die Gewichte ω_i und interpretieren Sie das Resultat geometrisch.

H 5 Gibt es einen Wert $y(0)$, so daß der natürliche Spline zu den Daten

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	1	$y(0)$	0	-4

im Intervall $[-2,-1]$ $s_0(x) = 3x+4$ und im Intervall $[1,2]$ $s_3(x) = 4-4x$ lautet?

H 6 Sei $\ldots < x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots$ eine nicht notwendigerweise äquidistante Gittereinteilung auf $\mathbb{R}$.

Gesucht ist eine Funktion f aus C^2, $f \not\equiv 0$, die stückweise aus Π_3 ist und einen minimalen Träger besitzt. Auf einem Träger mit 4 Teilintervallen ist dies in der Tat möglich, eine formal einfache Darstellung mit der freien Funktionsvariablen z ist

$$B(z) \;=\; g_{[x_{i-2},x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i+2}]}(z)$$

also die 4-te dividierte Differenz der Funktion zweier Variablen $g(x,z)$ bezüglich der Variablen x mit

$$g(x,z) \;=\; \begin{cases} (z-x)^3 & \text{für} \quad z \geq x \\ 0 & \text{für} \quad z < x \end{cases}$$

Diese ist auf einer Intervallbreite von vier Teilintervallen ungleich Null. Es stellt sich nun die Frage, ob es eine entsprechende Funktion mit kleinerem Träger gibt. Untersuchen Sie dies auf den Intervallen $[x_0, x_2]$ bzw. $[x_0, x_3]$.

Hinweis: Der Träger einer Funktion ist definiert als

$$supp(f) := \{x | f(x) \neq 0\}.$$