Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

28. Januar 2008

# Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
# Übung 14

## Präsenzübung

**Ü 45** Gegeben sei das parabolische Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) &= f(x) && \text{für } x \in [0,1] \\ u(0,t) &= \phi(t) && \text{für } t \in [0,T] \\ u_x(1,t) &= \psi(t) && \text{für } t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Das Problem soll mit dem Crank-Nicholson-Verfahren gelöst werden, wobei aber die Gitterpunkte so zu legen sind, daß $x = 1$ genau in der Mitte zwischen den beiden äußersten Gitterpunkten liegt, damit die rechte Randbedingung von zweiter Ordnung approximiert werden kann, während $x = 0$ der äusserste linke Gitterpunkt bleiben soll.

**a)** Wie ist die Raumschrittweite $h$ in Abhängigkeit von $M$ zu wählen, wenn $M$ die Anzahl der unbekannten Knotenwerte bezeichnet?

**b)** Stellen Sie das entstehende Gleichungssystem analog zu der Darstellung im Skript auf und zeigen Sie, daß es eindeutig lösbar ist.

**Ü 46** Sei

$$u_t = a u_x, \quad a > 0.$$

Diskretisieren Sie diese hyperbolische DGL mit konstantem Koeffizienten $a$ wie folgt:

$$u_t(x_j, t_k) \approx \frac{1}{\tau}\left(u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)\right)$$

und

$$\begin{aligned} u_x(x_j, t_k) &\approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_{j+1}, t_k) - u(x_j, t_k)\right) \quad \text{bzw.} \\ u_x(x_j, t_k) &\approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_j, t_k) - u(x_{j-1}, t_k)\right). \end{aligned}$$

**a)** Wie lautet die Lösung der DGL, wenn $g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ die Anfangsdaten sind?

**b)** Wie sehen die Differenzensterne der beiden Diskretisierungen aus?

**c)** Wie sind $\tau$ und $h$ und der Differenzenstern zu wählen, damit die CFL-Bedingung erfüllt ist?

**d)** Für welche Wahl von $\tau$ und $h$ liefert die Approximation die exakte Lösung?

**Ü 47** Die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{x,x} \quad \text{für} \quad 0 < x < 1\,,\; t > 0 \\ u(x,0) &= x^2 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) &= 0 \quad \text{für} \quad t \ge 0 \\ u(1,t) &= 1 \quad \text{für} \quad t \ge 0 \end{aligned}$$

soll mit der Standard-Semidiskretisierung gelöst werden unter Verwendung des Integrators zweiter Ordnung

$$3y_{n+1}^h - 4y_n^h + y_{n-1}^h \;=\; 2hf(t_{n+1}, y_{n+1}^h),\;\; h \;=\; \text{Zeitschrittweite}$$

für eine DGL 1. Ordnung

$$y' \;=\; f(t,y)$$

Wie lautet das lineare Gleichungssystem für eine allgemeine Zeitschicht bei konstanter Zeitschrittweite und konstanter Raumschrittweite?

**Hausübung**

**H 45** Gegeben sei das parabolische Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) &= f(x) && \text{für } x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 && \text{für } t \in [0,T], \end{aligned}$$

mit $f(0) = f(1) = 0$.

**a)** Diskretisieren Sie die vorliegende Differentialgleichung bezüglich der Ortsvariablen $x$. Man erhält ein Anfangswertproblem für die Funktion $u_j^h(t) \approx u(x_j, t)$.

**b)** Wenden Sie das implizite Euler-Verfahren zur Zeitintegration des in a) gefundenen AWP an. Wie lautet die Berechnungsvorschrift für $u_{k+1}^{h,\tau}$ komponentenweise und welcher Differenzenstern ergibt sich ?

**H 46** Das hyperbolische Anfangsrandwertproblem

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{für} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T),$$

mit den Anfangswerten

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(\pi x) \\ u_t(x,0) &= \cos(\pi x) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad x \in [0,1]$$

und den Randwerten

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(1,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad t \in [0,T].$$

soll nach der Linienmethode näherungsweise gelöst werden.

**a)** Semidiskretisieren Sie zunächst die Differentialgleichung bezüglich der Ortsvariablen $x$. Dabei entsteht eine Anfangswertaufgabe gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung.

**b)** Wenden Sie das Integrationsverfahren von Störmer

$$\text{DGL: } y'' = f(t,y) \;:\; y_{n+1}^h - 2y_n^h + y_{n-1}^h = h^2 f(t, y_n^h)$$

auf die Anfangswertaufgabe aus a) an. Wie lautet die Berechnungsvorschrift für $\vec{u}_{k+1}^{h,\tau}$, die neue Zeitschicht, komponentenweise ? Wie sieht der Differenzenstern aus ?

**Hinweis:** Betrachten Sie nur den allgemeinen Schritt auf die Zeitschicht $k+1$.

**H 47** a) Wir betrachten das System von Advektionsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \partial_x u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $u : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ und $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A$ und entkoppeln Sie das System, indem Sie die Matrix $A$ diagonalisieren.

b) Verifizieren Sie, daß durch $v(x,t) = v_0(x+at)$, $a > 0$ eine Lösung der skalaren Advektionsgleichung

$$\partial_t v(x,t) = a\partial_x v(x,t), \qquad v(x,0) = v_0(x), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

gegeben ist. Zeigen Sie außerdem, daß $v(x,t)$ entlang der Geraden $x + at = c, c \in \mathbb{R}$, konstant ist.

c) Gegeben seien eine Diskretisierung $x_i = i \cdot \Delta x, i \in \mathbb{Z}$, $t_j = j \cdot \Delta t, j \in \mathbb{N}$ und das sogenannte Up-Wind-Verfahren

$$v^h(x_i,t_j) = v^h(x_i,t_{j-1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x} a(v^h(x_{i+1},t_{j-1}) - v^h(x_i,t_{j-1})).$$

Es sei $v^h(x_{i_0},t_{j_0})$ ein fester mit diesem Verfahren berechneter Näherungswert. Bestimmen Sie das Intervall $[x_l,x_r]$, in dem die Anfangswerte $v_0(x_i)$ liegen, von denen $v^h(x_{i_0},t_{j_0})$ abhängt.

d) Der Wert der exakten Lösung $v(x_{i_0},t_{j_0})$ hängt nur von dem Wert $v_0(x_{i_0}+at_{j_0})$ ab. Wie müssen $\Delta x$ und $\Delta t$ gewählt werden, damit $x_{i_0}+at_{j_0}$ in dem im Aufgabenteil c) bestimmten Intervall liegt? Wie müssen $\Delta x$ und $\Delta t$ im Fall des Systems aus Aufgabenteil a) gewählt werden?