Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21. Januar 2008

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 13

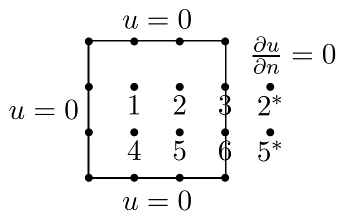
Präsenzübung

Ü 42 2D-Dirichlet-Neumann-Problem

Das gemischte Dirichlet-Neumann-Problem auf dem Gebiet $G = [0, 1] \times [0, 1]$,

$$\begin{array}{rcllcl} -\Delta u(x,y) & = & f(x,y), & (x,y) & \in & G, \\ u(x,0) & = & 0, & & & \\ u(0,y) & = & 0, & & & \\ u(x,1) & = & 0, & & & \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & 0, & (x,y) & \in & \{(x,y) | x = 1\} \end{array}$$

soll mit dem 5-Punkte-Stern und $h = 1/3$ diskretisiert werden. Verwenden Sie eine Diskretisierung der Randableitung von zweiter Ordnung.



Hinweis: Benutzen Sie zur Diskretisierung der Neumann-Randbedingung die fiktiven Knoten 2^* und 5^*, und eliminieren Sie die fiktiven Knoten anschließend durch Diskretisierung der Differentialgleichung auf dem Rand. Stellen Sie die 6 linearen Gleichungen explizit auf.

Ü 43 Die Randwertaufgabe

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1 + xy)u_x\right) + u_{yy} = y(y - 2 - 4xy) \quad 0 < x,\ y < 1$$
$$u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \text{ für } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,1) = x(1-x) \text{ für } 0 < x < 1$$

soll mit $h = \frac{1}{2}$ diskretisiert werden. Geben Sie alle Gleichungen explizit an.

Ü 44 Wir betrachten die elliptische Randwertaufgabe

$$(1 + xy)u_{xx} - x^2y^2u_{xy} + (4 + y^2)u_{yy} \ = \ 1 \text{ auf } [0, 1] \times [0, 1]$$

mit der Dirichletrandbedingung

$$u(x,y) \ = \ 1 \text{ wenn } x = 0 \text{ oder } x = 1 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } y = 1\ .$$

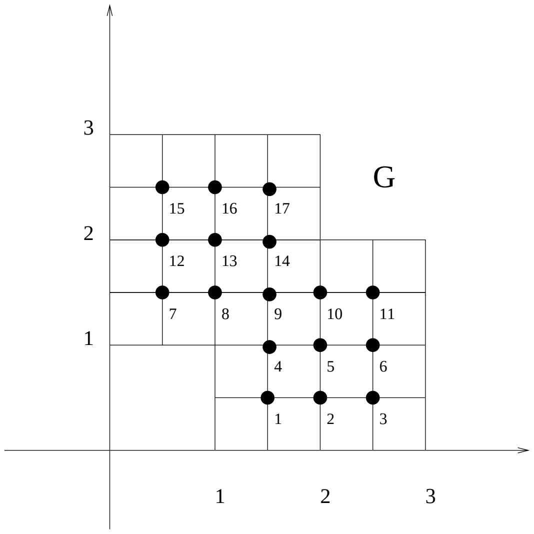
Dieses Problem soll von 2. Ordnung in h mit $h = \frac{1}{4}$ so diskretisiert werden, daß ein lineares Gleichungssystem mit einer M-Matrix entsteht. Numerieren Sie die relevanten Knoten zeilenweise (x-Richtung) mit wachsendem y-Wert und stellen Sie die Gleichung für den Knoten mit den Koordinaten $x = 1/2,\ y = 3/4$ explizit auf.

Hausübung

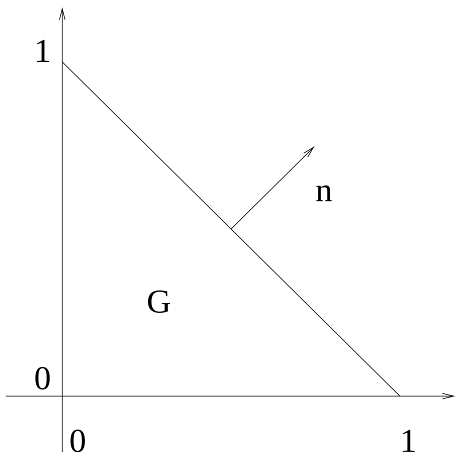
H 42 Man stelle das Gleichungssystem für die Standarddiskretisierung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= xy \quad (x,y) \in G \\ u &= 1 \quad (x,y) \in \partial G \end{aligned}$$

auf mit $h = 0.5$ und dem Gebiet



H 43 Lösen Sie das Randwertproblem



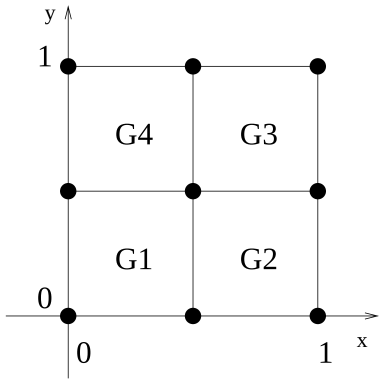
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, & (x,y) &\in G, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1-x) &= 0, & x &\in [0,1], \\ u(x,0) &= 1 - x^2, & x &\in [0,1], \\ u(0,y) &= 1 - y^2, & y &\in [0,1] \end{aligned}$$

mit der Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ und einer Diskretisierung der Randableitung von 2. Ordnung.

H 44 Auf die Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & xy(x-1)(y-1) & (x,y) \in G = (0,1)^2 \\ u & = & 0 & (x,y) \in \partial G \end{array}$$

soll die einfachste Methode der finiten Elemente angewendet werden. Verwenden Sie die Zerlegung



und die stückweise bilineare Ansatzfunktion $\varphi(x,y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy$ (i=1,2,3,4). Bestimmen Sie eine Näherung für $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Hinweis: Verwenden Sie auf G2,G3 und G4 bei der Berechnung der Integrale die Transformation $z = 1 - x$ bzw. $z = 1 - y$. Dadurch lassen sich die Integrale auf die Form der Integrale auf G1 zurückführen.