Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Peter Spellucci
WS 2007/08

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

15. Januar 2008

Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Übung 12

Präsenzübung

Ü 39 Approximieren Sie die Lösung $y(x)$ des Randwertproblems

$$y'' = \frac{2y}{(1+x)^2}, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 1 \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

mit dem Differenzenverfahren 2. Ordnung für $h_1 = \frac{1}{2}$ und $h_2 = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie durch Extrapolation einen genaueren Näherungswert für $y(\frac{1}{2})$. Die exakte Lösung lautet $y(x) = \frac{1}{1+x}$.

Ü 40 Selbstadjungierte Probleme

Die Randwertaufgabe

$$((1+x)^3 y')' + \sin(x) y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 1$$

soll unter Verwendung von Differenzenverfahren mit Gitterabstand $h = \frac{1}{n}$ gelöst werden.

1. Formen Sie die Differentialgleichung durch Ausdifferenzieren um und bestimmen Sie eine Diskretisierung mit Differenzenformeln zweiter Ordnung. Ist die erhaltene Matrix symmetrisch?
2. Diskretisieren Sie die Differentialgleichung durch iteriertes Anwenden von Differenzenformeln zweiter Ordnung mit halbierter Schrittweite. Zeigen Sie, daß diese Diskretisierung eine symmetrische Matrix liefert.

Ü 41 **RWA mit gemischten Randwerten.** Vorgelegt sei ein Randwertproblem der Form

$$-y''(x) = f(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, \; y'(b) = \beta.$$

a) Wie lautet die exakte Lösung dieses Randwertproblems?
(Hier kann man schrittweise explizit integrieren)

b) Verwenden Sie zur Diskretisierung mit $h = \frac{b-a}{N+1}$ und $x_i = a + ih$ folgendes Differenzenverfahren:

$$\begin{aligned} {y^h}_0 &= \alpha \\ -{y^h}_{i-1} + 2{y^h}_i - {y^h}_{i+1} &= h^2 f(x_i), \quad i = 1, ..., N \\ {y^h}_{N+1} - {y^h}_N &= h\,\beta \end{aligned}$$

Von welcher Ordnung ist die Diskretisierung der ersten Ableitung? Wie lautet das entstehende Gleichungssystem? Zeigen Sie, daß es sich bei der Matrix um eine irreduzibel diagonaldominante Tridiagonalmatrix handelt.

c) Die Approximation des rechten Randwertes kann auch erfolgen durch

$$\begin{aligned} -{y^h}_{N+2} + 2{y^h}_{N+1} - {y^h}_N &= h^2\, f(x_{N+1}), \\ {y^h}_{N+2} - {y^h}_N &= 2h\,\beta, \end{aligned}$$

wobei die Hilfsgröße ${y^h}_{N+2}$ an der Stützstelle x_{N+2} eingeführt wird. Diese kann jedoch durch Addition der beiden Zeilen eliminiert werden. Wie verändert sich das Gleichungssystem aus b), wenn die letzte Zeile durch die neue Bedingung ersetzt wird? Von welcher Ordnung ist diese Diskretisierung der ersten Ableitung?

Hausübung

H 39 Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-y'' + x^2 y' + y^3 = -1, \; x \in [0,1] \quad \text{mit} \quad y(0) = y(1) = 0.$$

a) Diskretisieren Sie das RWP mit dem Differenzenverfahren 2. Ordnung auf einem allgemeinen Gitter $x_i = 0 + i \cdot h$ mit $i = 0, \dots, N$ und $h = \frac{1}{N}$.

b) Das entstehende Gleichungssystem ist nichtlinear. Zeigen Sie, daß die Jacobimatrix des Systems für alle möglichen h eine irreduzibel diagonaldominate L-Matrix ist.

H 40 Nichtsymmetrischer Differenzenquotient
Die Symmetrie hat für numerische Verfahren eine große Bedeutung. Ähnlich zu den Quadraturen bringt die Symmetrie auch in den Differenzenquotienten jeweils eine Ordnung mehr. Bei einem nichtäquidistanten Gitter geht die Symmetrie verloren. Zeigen Sie, dass

$$y_i'' \;\approx\; 2\,\frac{h_{i+1} y_{i-1} \;-\; (h_i + h_{i+1}) y_i \;+\; h_i y_{i+1}}{h_i\, h_{i+1}\, (h_i + h_{i+1})}\,, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

nur noch eine Approximation erster Ordnung darstellt.

H 41 Ein Balken der Biegesteifigkeit JE werde auf einen elastischen Untergrund (mit der Federkonstanten $k(x)$ pro Längeneinheit) gelegt und mit dem Gewicht $p(x)$ belastet. Die Durchbiegung y wird durch folgendes Randwertproblem beschrieben:

$$\begin{aligned} (JEy'')'' + ky + p &= 0 \\ y''(0) = y'''(0) = y''(L) = y'''(L) &= 0 \end{aligned}$$

a) Diskretisieren Sie die Differentialgleichung für $JE = 1$, indem Sie $x_i = ih$ für $i = -2, -1, \dots, N+1, N+2$ mit $h = 1/N$ setzen und $y''''(x_i)$ durch

$$y''''(x_i) \approx h^{-4}({y^h}_{i-2} - 4{y^h}_{i-1} + 6{y^h}_i - 4{y^h}_{i+1} + {y^h}_{i+2}), \qquad i = 0, \dots, N$$

approximieren. Die Randbedingungen sollen durch

$$\begin{aligned} {y^h}_{-2} - 2{y^h}_{-1} + {y^h}_0 &= 0 \qquad & {y^h}_{N-1} - 2{y^h}_N + {y^h}_{N+1} &= 0 \\ {y^h}_{-1} - 2{y^h}_0 + {y^h}_1 &= 0 \qquad & {y^h}_N - 2{y^h}_{N+1} + {y^h}_{N+2} &= 0 \end{aligned}$$

angenähert werden. Wie lautet das zu lösende Gleichungssystem?
Eliminieren Sie die fiktiven Knoten ${y^h}_{-2}, {y^h}_{-1}$ und ${y^h}_{N+1}, {y^h}_{N+2}$ aus dem Gleichungssystem.

b) Zeigen Sie, daß die Approximation der Randbedingungen für Polynome dritten Grades exakt ist.